

Chaos Stabilization via Hybrid Control

M. Prian, M. J. López, *Member, IEEE* and F. M. Verdulla

Abstract— In this paper we propose a new control method which stabilizes chaotic systems in the neighborhood of unstable periodic orbits (UPO) embedded in a strange attractor. It is used for that a piecewise continuous signal generated by means of two controllers, one analogic and other digital. The hybrid control method is synthesized in an algorithm which makes easy its application. Numerical simulations with chaotic and hyperchaotic systems show satisfactory results, achieving system stabilization in the proximity of UPO's.

Keywords— Analogical Controller, Chaos, Control Hypersurface, Digital Controller, Event Condition, Hybrid Controller, Hyperchaos, Piecewise Continuous Control Signal, Unstable Periodic Orbit.

I. INTRODUCCIÓN

LA ESTABILIZACIÓN de órbitas periódicas inestables (Unstable Periodic Orbits, UPO's) embebidas en atractores extraños, ha llamado mucho la atención desde hace casi dos décadas y se ha realizado una investigación multidisciplinar muy activa. El primer control del caos, conocido como el método OGY, fue propuesto por Ott, Grebogi y Yorke en [1] y estabiliza los sistemas caóticos en torno a UPOs, conocidas a priori, mediante la utilización de pequeñas perturbaciones discontinuas de un parámetro. Posteriormente Pyragas en [2], [3] desarrolla un método de control continuo basado en auto-sincronización empleando retroalimentación del vector de estado y donde la señal de control se determina proporcionalmente a la diferencia entre el estado retrasado un tiempo T igual al período de la UPO a estabilizar y el estado actual. Este método de control necesita estimar el período de la órbita a estabilizar. Otras técnicas relacionadas con el control por realimentación retardada (*Delayed Feedback Control, DFC*) pueden verse en [4]-[6]. En [7]-[9], Matías y Güemez presentan un método para la estabilización de sistemas caóticos mediante la aplicación de pulsos proporcionales a las variables del sistema. González en [10] propone un método de control del caos para sistemas dinámicos continuos, utilizando técnicas de integración por tramos y una ley discreta de control impulsivo. Este método de control, está basado en el cambio instantáneo del estado del sistema en el momento de cruzar la trayectoria del mismo por una determinada sección de Poincaré, lográndose con ello estabilizar el sistema caótico en torno a una UPO. Dicha técnica quedaría enmarcada en el problema de control por impulsos (*Impulsive Control*) [11]-[13]. Ushio y Yamamoto proponen en [14] un método de control del caos para sistemas

en tiempo discreto, basado en predicción, para controlar órbitas T-periódicas. En [15] Yu-Ping Tian y Xinghuo Yu proponen un método de control llamado (*Time Delayed Impulsive Control*) basado en la utilización de una ley de control retroalimentado en tiempo discreto. Otros trabajos relacionados con la estabilización del caos en UPOs, en ciclos límite o bien en puntos de equilibrio, ofrecen una visión del problema desde el punto de vista de la ingeniería de control y pueden verse en [16]- [23].

En este artículo, se propone un nuevo método para la estabilización de sistemas caóticos e hipercaóticos en la vecindad de órbitas periódicas inestables, es decir en sombras de UPOs, ya que la trayectoria del sistema controlado, se acercará asintóticamente a una UPO conocida o no conocida a priori, pero el ruido inherente a todo sistema físico, la hará fluctuar en un pequeño entorno de la misma. Las leyes de control, serán generadas mediante el empleo de un controlador híbrido analógico-digital. El resto del artículo queda organizado como sigue: En la sección II se describe el método de control para la estabilización de procesos caóticos en torno de UPOs no conocidas a priori. En la sección III se presenta un algoritmo que facilita el ajuste de los parámetros del controlador híbrido. En la sección IV se modifica ligeramente el controlador digital para que establezca el sistema de control en la vecindad de UPOs conocidas a priori. En la sección V se muestran algunos resultados de simulación numérica del sistema de control estabilizado en sombras de UPOs que son desconocidas de antemano. En la sección VI se muestra un ejemplo de los efectos del ruido de medida en el sistema de control. Finalmente, en la sección VII se presentan las conclusiones.

II. ESTABILIZACIÓN DEL CAOS EN UNA ÓRBITA PERIÓDICA INESTABLE

Se considera un sistema dinámico no lineal n-dimensional en tiempo continuo (planta), cuyas ecuaciones de estado son:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1)$$

Con $\mathbf{x}(t) \in U$ ($U \subset \mathfrak{R}^n$), $\mathbf{u}(t) \in V$ ($V \subset \mathfrak{R}^p$) y U , V son respectivamente conjuntos abiertos en \mathfrak{R}^n y \mathfrak{R}^p donde $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ es un vector de estado, $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)]^T$ es el vector de entradas de control, $\mathbf{G}: W \rightarrow \mathfrak{R}^n$ ($W \subset \mathfrak{R}^n$) es el vector de campo en bucle cerrado, $\mathbf{F}: U \rightarrow \mathfrak{R}^n$ con $\mathbf{F} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ es el vector de campo en bucle abierto y \mathbf{B} es una matriz de

M. Prian, Universidad de Cádiz, Spain, manuel.prian@uca.es
M. J. López, Universidad de Cádiz, Spain, manueljesus.lopez@uca.es
F. M. Verdulla, Universidad de Cádiz, Spain, francisco.verdulla@uca.es

coeficientes constantes y dimensión ($n \times p$). Se asume que el vector de salida $\mathbf{y}(t)$ del sistema dinámico es accesible e igual al vector de estado $\mathbf{x}(t)$, y también, que la planta o proceso, libre de control, presenta comportamiento caótico para unas determinadas condiciones iniciales. Para estabilizar la planta, en la vecindad de una UPO inherente al caos, es decir, en una sombra de la misma, se utiliza un controlador híbrido analógico-digital que genera dos leyes de control retroalimentado, una en tiempo continuo y otra en tiempo discreto.

A. Definiciones

Se dan a continuación las definiciones necesarias para la síntesis del método de control híbrido propuesto.

1) Hipersuperficie de Poincaré o de control

Sea la hipersuperficie de Poincaré, la cual será denominada de control, dada por $\Sigma_p = \{\mathbf{x} \in Q : S(\mathbf{x}) = 0\}$, donde Q es un conjunto abierto de \mathfrak{R}^n y $S : Q \rightarrow \mathfrak{R}$ es una función de clase C^k , $k \geq 1$ tal que $\nabla S(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \Sigma_p$ y que es transversal al campo vectorial \mathbf{G} de (1) en lazo cerrado, es decir, $\langle \nabla(S(\mathbf{x})), \mathbf{G}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \rangle \neq 0$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{x}(t) \in \Sigma_p$.

2) Condiciones de evento

La hipersuperficie de control Σ_p divide el espacio de estado de (1) en lazo cerrado en dos regiones, expresadas por los siguientes conjuntos: $\Sigma_- = \{\mathbf{x} \in U : S(\mathbf{x}) < 0\}$ y $\Sigma_+ = \{\mathbf{x} \in U : S(\mathbf{x}) > 0\}$, donde $\Sigma_- \cup \Sigma_p \cup \Sigma_+ \subset \mathfrak{R}^n$. Cuando la trayectoria definida por el vector $\mathbf{x}(t)$, viaje por el espacio de estado en el sentido de Σ_- hacia Σ_+ y se verifique en ciertos instantes de evento, $t = t_j$ ($j = 1, 2, \dots$) que $S(\mathbf{x}(t_j)) = 0$, diremos que se ha cumplido una condición de evento ascendente (CEA). Se denota la citada CEA, por $S(\mathbf{x}(t_j))^{\uparrow} = 0$ ($j = 1, 2, \dots$). De forma análoga se define la condición de evento descendente (CED) y que viene expresada por $S(\mathbf{x}(t_j))^{\downarrow} = 0$. El subíndice j se denomina de impacto o de evento, por indicar el orden en las intersecciones de la trayectoria del vector de estado $\mathbf{x}(t)$ con la hipersuperficie de control Σ_p .

3) Ley de control digital

Se considera la ley de control digital $\mathbf{v}(t_j) = \mathbf{z}(t_j) - \mathbf{B}^T \mathbf{x}(t_j)$ definida para los sucesivos impactos de la trayectoria del vector de estado $\mathbf{x}(t)$, con la hipersuperficie de control Σ_p , siendo $\mathbf{z}(t_j)$ ($j = 1, 2, \dots$) la salida del filtro en tiempo discreto $\mathbf{z}(t_j) = \mathbf{B}^T \mathbf{x}(t_j) + \mathbf{A}(\mathbf{z}(t_{j-1}) - \mathbf{B}^T \mathbf{x}(t_j))$, donde $\mathbf{z}(t_j) \in \mathfrak{R}^p$, $\mathbf{v}(t_j) \in \mathfrak{R}^p$, $\mathbf{x}(t_j)$ denota la variable cuantificada de tiempo

discreto del vector de estado de la planta en los instantes de evento $t = t_j$ ($j = 1, 2, \dots$), $\mathbf{z}(t_{j-1})$ es el vector de salida del filtro en el instante anterior al presente, tomando para $j = 1$ el valor $\mathbf{z}(t_0)$ que es la condición inicial en el origen de los tiempos del mismo; \mathbf{B}^T es la matriz transpuesta de \mathbf{B} y $\mathbf{A} = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{pp})$ es una matriz diagonal de parámetros constantes de dimensión ($p \times p$).

4) Tiempos de vuelo

Los intervalos de tiempo Δt_j , dados por $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ ($j = 1, 2, \dots$) son usualmente llamados tiempos de vuelo, y son los tiempos transcurridos, entre dos impactos consecutivos de la trayectoria del vector de estado $\mathbf{x}(t)$ con la hipersuperficie de control Σ_p , en un sentido determinado.

5) Ley de control en tiempo continuo

Se considera la ley de control en tiempo continuo $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{e}(t)$ con $\dot{\mathbf{e}}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{e}(t)$ y condición inicial $\mathbf{e}(t_0)$, donde $\mathbf{e}(t) \in V$ y $\mathbf{K} = \text{diag}(k_{11}, k_{22}, \dots, k_{pp})$ es una matriz diagonal de parámetros constantes de dimensión ($p \times p$). A dicha ley de control, se le imponen nuevas condiciones iniciales en los instantes de evento retardados $t = t_j + \delta_j$ ($j = 1, 2, \dots$), dadas por $\mathbf{e}(t_j + \delta_j) = \mathbf{Q}(\mathbf{v}(t_j))$, siendo \mathbf{Q} una función vectorial de conversión digital-analógica (D/A) donde $\mathbf{v}(t_j)$ es la ley de control en tiempo discreto y δ_j un intervalo de tiempo, denominado de retardo, que debe ser mucho menor que el tiempo de vuelo, es decir $\delta_j \ll \Delta t_j$. Por lo visto, la ley de control en tiempo continuo $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{e}(t)$ viene dada, a partir del primer impacto de la trayectoria del vector de estado $\mathbf{x}(t)$ con la hipersuperficie de control, por $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K} \exp[-\mathbf{K}(t - (t_j + \delta_j))] \mathbf{Q}(\mathbf{v}(t_j))$ definida para los intervalos de tiempo $t_j + \delta_j \leq t < t_{j+1} + \delta_{j+1}$ ($j = 1, 2, \dots$) y por tanto es una función vectorial a trozos y continua en cada uno de ellos, presentando una discontinuidad de salto finito en los instantes de evento retardados $t = t_j + \delta_j$ ($j = 1, 2, \dots$) siendo la amplitud del salto aproximada igual a $\|\mathbf{K}\mathbf{Q}(\mathbf{v}(t_j))\|$.

B. Método de control híbrido

Se describe aquí el método de control híbrido para estabilizar caos e hipercaos en torno de UPOs no conocidas a priori. En el diagrama de bloques de la Fig. 1 se observan los bloques del controlador analógico, controlador digital y planta o proceso a controlar. Se ha optado, por incluir el detector de condición de evento en el controlador analógico y no en el digital, porque la máxima frecuencia de muestreo que permita este último, limitaría la efectividad del método de control en procesos caóticos muy rápidos.

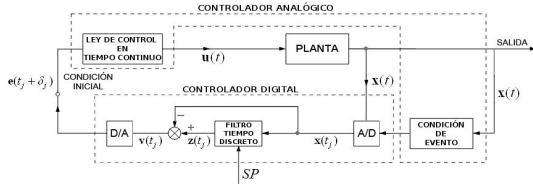


Figura 1. Diagrama de bloques del sistema de control híbrido.

Supóngase elegida una cualquiera de las dos condiciones de evento posibles CEA o CED y que ésta se verifica en los instantes de evento $t = t_j$ ($j=1,2,\dots$), en dichos instantes, el detector de condición de evento activa el convertidor analógico-digital (A/D) para obtener el vector $\mathbf{x}(t_j)$, este vector será empleado por el controlador digital para calcular la ley de control en tiempo discreto $\mathbf{v}(t_j)$ definida en la subsección II-A-3. En los instantes de evento retardados $t = t_j + \delta_j$ ($j=1,2,\dots$) estarán disponibles las condiciones iniciales $\mathbf{e}(t_j + \delta_j) = \mathbf{Q}(\mathbf{v}(t_j))$ en el controlador analógico y se generará la ley de control continua a trozos $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{e}(t)$. La ley de control en tiempo continuo $\mathbf{u}(t)$ es sumada a la planta a través de su entrada de control, obteniéndose $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e}(t)$. El tiempo de retardo δ_j , definido en la subsección II-A-5, es igual, al empleado por el controlador digital en la síntesis de la condición inicial del controlador analógico, más el tiempo necesario para la introducción en el mismo, de dicha condición inicial. Este tiempo debe ser $\delta_j \ll \Delta t_j$ para el correcto funcionamiento del sistema de control.

La entrada de referencia SP , que se observa en la Fig. 1, es un valor constante que se utiliza para dirigir el sistema hacia una UPO conocida previamente, los cambios necesarios en el controlador digital para lograrlo, se darán en la sección IV.

A continuación se describe formalmente el sistema de control para la búsqueda de UPOs no conocidas a priori mediante las siguientes expresiones:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2)$$

Donde (2) representa la planta con la ley de control aplicada.

$$S(\mathbf{x}(t_j))^{\uparrow} = 0 \quad \text{ó} \quad S(\mathbf{x}(t_j))^{\downarrow} = 0, \quad (j=1,2,\dots) \quad (3)$$

Donde (3) son las dos condiciones de evento posibles.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{z}(t_j) &= \mathbf{B}^T \mathbf{x}(t_j) + \mathbf{A}(\mathbf{z}(t_{j-1}) - \mathbf{B}^T \mathbf{x}(t_j)) \\ \mathbf{v}(t_j) &= \mathbf{z}(t_j) - \mathbf{B}^T \mathbf{x}(t_j) \end{aligned} \right\} (j=1,2,\dots) \quad (4)$$

Donde (4) es la ley de control en tiempo discreto.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t) &= -\mathbf{K}\mathbf{e}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{K}\mathbf{e}(t) \end{aligned} \quad CI = \begin{cases} \mathbf{e}(t_0) \\ \mathbf{e}(t_j + \delta_j) = \mathbf{Q}(\mathbf{v}(t_j)) \\ (j=1,2,\dots) \end{cases} \quad (5)$$

Donde (5) es la ley de control en tiempo continuo con las condiciones iniciales (CI) indicadas.

C. Estabilidad del sistema de control en lazo cerrado

Una UPO es una órbita periódica inestable, que es solución del sistema de control en lazo abierto y que coexiste con el atractor caótico del mismo. Si el sistema de control en lazo cerrado tiene como órbita solución una UPO asintóticamente estable, entonces, existe una cuenca de atracción desde la cual la trayectoria del sistema se acercará a dicha órbita para unas determinadas condiciones iniciales y por consiguiente, se deberá cumplir que la ley de control en tiempo continuo $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K} \exp[-\mathbf{K}(t - (t_j + \delta_j))] \mathbf{Q}(\mathbf{v}(t_j))$, definida en los intervalos $t_j + \delta_j \leq t < t_{j+1} + \delta_{j+1}$, tienda a cero a medida que el subíndice de impacto j tienda a infinito. En los resultados presentados en la subsección V se refleja este hecho y se observa en las simulaciones, que la señal de control se desvanecerse a medida que el sistema de control se estabiliza. El cálculo de los exponentes de Lyapunov [24] de dichos sistemas controlados, es decir en bucle cerrado, dan como resultado, tres exponentes negativos y uno cero para los sistemas caóticos y cuatro exponentes negativos y uno cero para el hipercaótico. En lo que sigue, con objeto de abreviar la notación empleada, se hacen los siguientes cambios: $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}(t_j)$, $\mathbf{z}_j = \mathbf{z}(t_j)$, $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}(t_j)$ y $\mathbf{e}_j = \mathbf{e}(t_j + \delta_j)$ suponiéndose en todo momento que el subíndice de impactos j toma los valores $(j=1,2,\dots)$.

III. ALGORITMO DE CONTROL HÍBRIDO

El algoritmo se expone para el caso de control escalar, $u(t) \in \mathcal{R}$ y para estabilizar órbitas periódicas inestables, desconocidas previamente, de periodo uno con respecto a la hipersuperficie de control. En estas condiciones las matrices diagonales de parámetros constantes \mathbf{K} y \mathbf{A} tienen un único coeficiente, sean estos respectivamente k_i y a_i . La matriz \mathbf{B} es una matriz de dimensión $(n \times 1)$ con un único coeficiente distinto de cero e igual a la unidad, sea este $b_i = 1$, indicando el subíndice i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ que el control escalar se aplica al sistema de control por la entrada i -ésima.

A. Pasos del algoritmo

El algoritmo consta de los cinco pasos siguientes:

1) Elección de la hipersuperficie de control, condición de evento y entrada de control

La condición necesaria que debe cumplir la hipersuperficie de control para que el método de control funcione, es que la misma, sea transversal a la trayectoria del vector de estado $\mathbf{x}(t)$ del sistema de control en bucle cerrado. Para facilitar su elección, se dan a continuación algunas recomendaciones que suelen dar buenos resultados: Para procesos cuya no-linealidad esté compuesta por tramos lineales, probar inicialmente con una hipersuperficie de control construida con uno de los hiperplanos de conmutación del sistema. Para sistemas cuya no-linealidad sea diferenciable, probar con un hiperplano formado con una de las componentes del vector de

estado $\mathbf{x}(t)$ cuya derivada no tenga entrada de control o bien una combinación lineal del valor absoluto de la misma, en la forma $|x_d| - c = 0$ donde el subíndice d puede ser igual o distinto al i . También se pueden probar combinaciones lineales de la derivada del vector de estado $\mathbf{x}(t)$ como en [18]. En general, la condición de evento más apropiada CEA o CED será aquella que logre la estabilización del sistema en una sombra de UPO con un valor del parámetro k_{ii} mas pequeño. Una condición que parece ser suficiente, aunque no necesaria, para la elección de la entrada a la cual aplicar el control, es comprobar si el mapa de retorno z_{ij} frente a $z_{i(j+1)}$ del sistema de control en bucle abierto, es filiforme en las proximidades de un punto fijo, si esto ocurre, se comprobará que con el control aplicado dicho mapa de retorno gira alrededor del punto fijo al variar el parámetro a_{ii} de la matriz \mathbf{A} .

2) Ajuste de los parámetros de control

Para el ajuste de los parámetros de control e iniciar la búsqueda de las posibles UPOs, se recomienda seguir el siguiente procedimiento: Fijar a_{ii} en un valor próximo a uno por la izquierda y fijar un valor para $k_{ii} > 0$, si el sistema no se estabiliza, incrementar el valor de a_{ii} , si sigue sin estabilizarse, incrementar k_{ii} . Si el sistema se estabiliza, pero la convergencia hacia una UPO es muy lenta, decrementar a_{ii} . Para estabilizar otros tipos de UPOs quizás poco frecuentes en los sistemas caóticos, fijar un valor de a_{ii} próximo a uno por la derecha y fijar un valor para $k_{ii} > 0$, si el sistema no se estabiliza, decrementar el valor de a_{ii} . Si el sistema se estabiliza, pero la convergencia hacia la UPO es muy lenta, incrementar el parámetro a_{ii} o incrementar k_{ii} , pero teniendo presente que existe una cota superior para k_{ii} en la cual el sistema no se estabiliza. Experimentalmente se ha obtenido para la cota superior el valor $k_{ii} = (1/\Delta\tau_0)\ln a_{ii}$, donde $\Delta\tau_0$ es el periodo de la órbita a estabilizar y $a_{ii} > 1$. Otra posibilidad para estabilizar algunos procesos caóticos, es prefijar el parámetro a_{ii} en el intervalo $0 < a_{ii} < 1$ y fijar un valor para $k_{ii} < 0$, a continuación, incrementar o decrementar k_{ii} hasta conseguir la estabilización, si ello fuera posible.

3) Cálculo de las leyes de control

Si se cumple la condición de evento elegida CEA o CED en los instantes de evento $t = t_j$, calcular la salida z_{ij} del filtro en tiempo discreto:

$$z_{ij} = x_{ij} + a_{ii}(z_{i(j-1)} - x_{ij}) \quad (6)$$

Con el valor z_{ij} obtenido en (6) calcular la ley de control en tiempo discreto:

$$v_{ij} = z_{ij} - x_{ij} \quad (7)$$

Dar en los instantes de evento retardados $t = t_j + \delta_j$ las condiciones iniciales $e_{ij} = Q_i(v_{ij})$ a la ley de control en tiempo continuo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= -k_{ii}e_i(t) \\ u_i(t) &= k_{ii}e_i(t) \end{aligned} \quad (8)$$

4) Cumplimiento de la condición de evento

Si se cumple la condición de evento saltar al paso 3.

5) Reajustes de parámetros

Si la planta no se estabiliza, ir al paso 2 y reajustar los parámetros k_{ii} o a_{ii} , si sigue sin conseguirse la estabilización, ir al paso 1 y reajustar los coeficientes de la hypersuperficie de control o aplicar la ley control a la planta por otra entrada.

B. Estabilización de UPOs de periodo múltiple

El algoritmo de control híbrido propuesto, también puede funcionar, para estabilizar el sistema de control en lazo cerrado en la vecindad de una UPO de periodo m , siendo $m \geq 1$ y siempre que m no sea demasiado elevado. Para ello, basta con aplicar el algoritmo propuesto cuando se verifique cada m veces la condición de evento elegida, CEA o CED. Es interesante reseñar, que si la planta tiene múltiples entradas de control, se puede aplicar el algoritmo a cada una de ellas, utilizando en todas, la misma condición de evento. En ese caso, las matrices diagonales \mathbf{A} y \mathbf{K} tendrían más de un elemento. En muchas ocasiones, la aplicación de control por múltiples entradas da mejores resultados que utilizando solamente control escalar, fundamentalmente, en cuanto a la rapidez de convergencia hacia una determinada UPO y a la robustez del sistema de control, no obstante, en algunos casos, el control múltiple es contraproducente, porque puede provocar que el sistema controlado no converja hacia una UPO, sino a otro tipo de ciclo límite estable, dando con ello lugar, a un mayor esfuerzo de control, ya que la ley de control en tiempo continuo no tendería a desvanecerse.

IV. ESTABILIZACIÓN DE ORBITAS PERIÓDICAS INESTABLES PREVIAMENTE CONOCIDAS

Si se requiere que el sistema se estabilice en torno de la misma UPO, independientemente de las condiciones iniciales existentes en el instante de aplicación del control, se deberá dar a la entrada de referencia SP del sistema de control, un valor constante, que se debe corresponder con el que debería tener la variable x_{ij} del filtro en tiempo discreto cuando la respuesta del sistema evolucionara en la sombra de la UPO previamente elegida. Es decir, se debe hacer $z_{ij} = SP + a_{ii}(z_{i(j-1)} - SP)$, el valor dado a SP deberá ser lo más próximo posible al valor asociado a la UPO correspondiente, ya que de esta forma, la amplitud de la señal de control sería la menor posible. Otra posibilidad sería tomar el parámetro a_{ii} del filtro en tiempo discreto igual a uno, en cuyo caso la ley de control en tiempo discreto pasaría a ser $v_{ij} = SP - x_{ij}$, para que la respuesta de la planta controlada también converja hacia una UPO.

V. RESULTADOS DE SIMULACIÓN NUMÉRICA

Los siguientes resultados de simulación numérica, se han obtenido aplicando el algoritmo de control híbrido, a tres sistemas con comportamiento caótico y a uno hipercaótico. Se ha considerado solamente la estabilización de órbitas periódicas inestables desconocidas de periodo uno. Las UPOs estabilizadas que se muestran en las figuras, se han representado sin añadir ruido a las variables medidas, con objeto de una mayor nitidez en las mismas. Para integrar numéricamente el sistema de control se ha empleado un integrador de Runge Kutta de cuarto orden con paso de integración Δt fijo y se ha empleado un tiempo de retardo δ_j constante de $10\Delta t$. Los tres casos de control escalar simulados se han efectuado con una condición de evento del tipo $(x_d(t)-c)^\dagger = 0$ con $d \neq i$ o bien $(|x_d(t)|-c)^\dagger = 0$ con el subíndice d igual o distinto al i , donde i es el subíndice de una componente de la derivada del vector de estado $\mathbf{x}(t)$ donde se aplica el control escalar. En el caso del sistema hipercaótico se ha aplicado control por dos entradas.

A. Sistema caótico de Lorenz

El sistema de Lorenz [25], con la ley de control escalar en tiempo continuo $u_3(t) = k_{33}e_3(t)$ aplicada en el lado derecho de la tercera ecuación, queda expresado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \sigma(x_2(t) - x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= rx_1(t) - x_1(t)x_3(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -\beta x_3(t) + x_1(t)x_2(t) + u_3(t) \end{aligned} \quad (9)$$

Los valores de los parámetros utilizados son: $\sigma = 10$, $r = 28$, $\beta = 8/3$ y las condiciones iniciales empleadas: $x_1(0) = 2,5$, $x_2(0) = 1,5$, $x_3(0) = -5$. Con las condiciones anteriores (9) presenta comportamiento caótico, suponiendo que $u_3(t) = 0$. El paso de integración empleado en la simulación ha sido $\Delta t = 10^{-5} s$, la condición de evento empleada ha sido una CEA de la forma $(|x_{2j}| - 5)^\dagger = 0$. Se han tomado para los parámetros de control los siguientes valores: $a_{33} = 0,8$ y $k_{33} = 56 s^{-1}$.

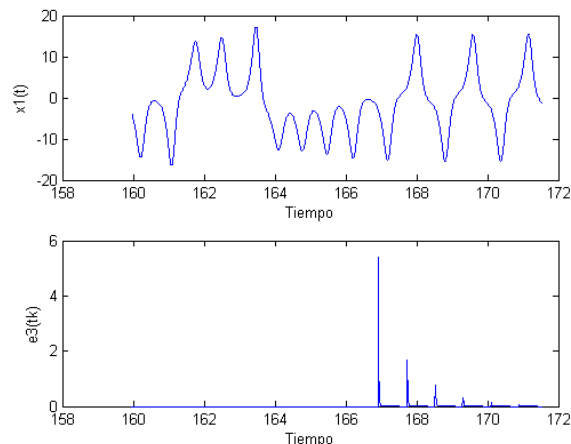


Figura 2. Diagramas temporales de la variable de estado $x_1(t)$ (arriba) y señal de control normalizada $e_3(t)$ (abajo) del atractor de Lorenz. La condición de evento es $(|x_{2j}| - 5)^\dagger = 0$. Los valores de los parámetros de control son: $k_{33} = 56 s^{-1}$ y $a_{33} = 0,8$.

En la Fig. 2 se observa la evolución temporal de la variable de estado $x_1(t)$ (arriba) y de la señal de control normalizada $e_3(t) = u_3(t) / k_{33}$ (abajo). Como puede apreciarse el valor de la señal de control normalizada tiende a disminuir a medida que el sistema estabilizado converge hacia una UPO.

La Fig. 3 representa un retrato de fases de las variables de estado $x_1(t)$ y $x_2(t)$ del sistema caótico de Lorenz estabilizado en torno a una UPO, una vez pasado el transitorio y se corresponde con el instante de control indicado en la Fig. 2.

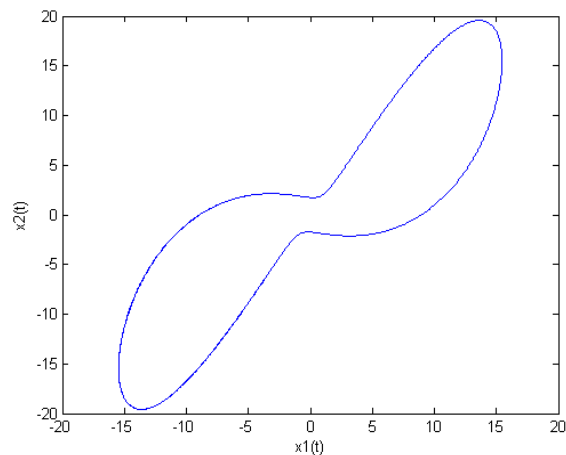


Figura 3. Retrato de fases del sistema de Lorenz estabilizado en torno a una UPO.

B. Sistema caótico OPWM

El sistema caótico, Oscilador en Puente de Wien Modificado (OPWM), denominado así, por su descubridor, nuestro añorado amigo y maestro, Profesor Dr. D. Rafael González López [26], queda expresado, con la ley de control

escalar en tiempo continuo $u_3(t) = k_{33}e_3(t)$ aplicada en el lado derecho de la tercera ecuación, por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= (f(x_3(t)) - x_3(t) - R_L x_1(t) - x_2(t)) / L \\ \dot{x}_2(t) &= (x_1(t)) / C \\ \dot{x}_3(t) &= (x_1(t) - (x_3(t)) / R) / C_1 + u_3(t) \\ f(x_3(t)) &= A / 2 (|x_3(t) + V_s / A| - |x_3(t) - V_s / A|) \end{aligned} \tag{10}$$

Los valores de los parámetros utilizados son: $L = 0,1 H$, $C = 0,1 \mu F$, $C_1 = 0,47 \mu F$, $R_L = 90 \Omega$, $R = 24 K \Omega$, $A = 5,8$, $V_s = 14 V$ y las condiciones iniciales: $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 3$, $x_3(0) = 0,3$. Con las condiciones anteriores (10) presenta comportamiento caótico, suponiendo que $u_3(t) = 0$. El sistema posee dos atractores caóticos para los valores de los parámetros dados y según cuales sean las condiciones iniciales el sistema evolucionará por uno o por otro. El paso de integración empleado en la simulación ha sido $\Delta t = 10^{-8} s$. y la condición de evento $(x_{2j})^\uparrow = 0$. Se han tomado para los parámetros de control los siguientes valores: $a_{33} = 0,8$ y $k_{33} = 40000 s^{-1}$.

En la Fig. 4 se observa la evolución temporal de la variable de estado $x_3(t)$ (arriba) y la señal de control normalizada $e_3(t)$ (abajo) del sistema OPWM estabilizado. Como puede apreciarse el valor de la señal de control aumenta inicialmente y luego tiende a disminuir a medida que el sistema se estabiliza en la vecindad de una UPO.

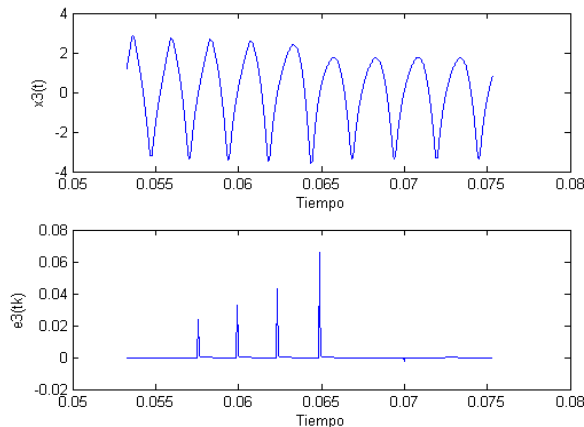


Figura 4. Diagramas temporales de la variable de estado $x_3(t)$ (arriba) y señal de control normalizada $e_3(t)$ (abajo), del sistema OPWM estabilizado. La condición de evento ha sido $(x_{2j})^\uparrow = 0$ y los valores de los parámetros de control son: $k_{33} = 40000 s^{-1}$, $a_{33} = 0,8$.

La Fig. 5 representa un retrato de fases formado por las variables de estado $x_3(t)$ y $x_1(t)$ del sistema OPWM estabilizado en la vecindad de una UPO que se corresponde con el instante de aplicación del control indicado en la Fig. 4. Para la obtención de la misma se ha eliminado el transitorio inicial.

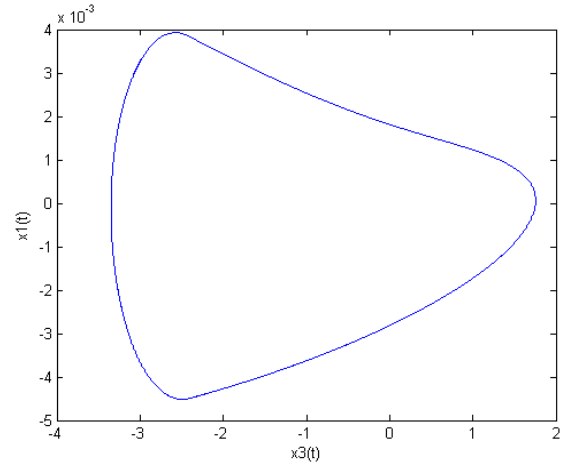


Figura 5. Retrato de fases del sistema OPWM estabilizado en torno a una UPO.

Se simula a continuación el sistema caótico OPWM con las condiciones iniciales: $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = -3$, $x_3(0) = -0,3$ y $u_3(0) = 0$, con objeto de obtener un atractor distinto al de la simulación anterior. Para el controlador se ha escogido una condición de evento del tipo $(x_{2j})^\downarrow = 0$. Se ha empleado un paso de integración de valor $\Delta t = 10^{-8} s$. Los parámetros de control, se han ajustado a los siguientes valores: $a_{33} = 0,8$ y $k_{33} = 40000 s^{-1}$.

En la Fig. 6 se observa un retrato de fases formado por las variables de estado $x_3(t)$ y $x_1(t)$ del sistema OPWM estabilizado en torno a la UPO correspondiente.

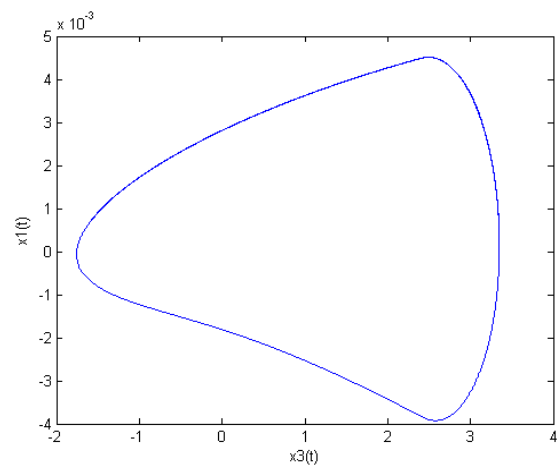


Figura 6. Retrato de fases del sistema OPWM estabilizado alrededor de una UPO opuesta a la mostrada en la Fig. 5.

La Fig. 7 muestra un retrato de fases formado por las variables de estado $x_3(t)$ y $x_1(t)$ del sistema OPWM estabilizado en torno a una UPO, con los siguientes valores de los parámetros de control: $a_{33} = 1,01$, $k_{33} = 40000 s^{-1}$ y las

mismas condiciones iniciales, paso de integración y condición de evento, que los utilizados para obtener la Fig. 6.

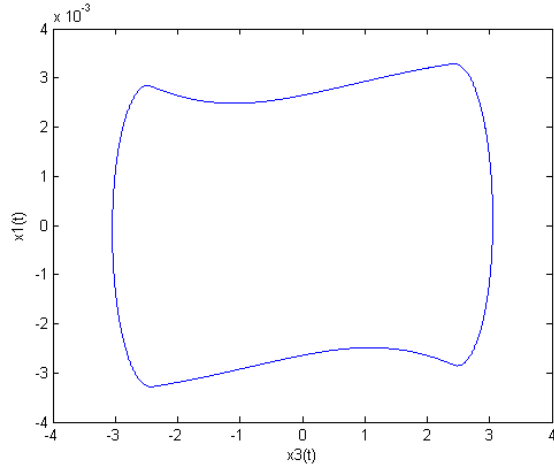


Figura 7. Sistema OPWM estabilizado en una vecindad de otra UPO.

La sombra de UPO mostrada en la Fig. 7 es independiente del atractor extraño en que se encuentre el sistema caótico, la órbita estabilizada siempre es la misma, no obstante, se puede presentar un problema de escape infinito en el instante de aplicación del control, ya que existe un conjunto de condiciones iniciales para los cuales el sistema de control es inestable para los parámetros de control utilizados.

C. Sistema caótico de Chua

El sistema caótico de Chua [27] con la ley de control escalar en tiempo continuo $u_3(t) = k_{33}e_3(t)$ aplicado en el lado derecho de la tercera ecuación, queda expresada por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= (G(x_2(t) - x_1(t)) - f(x_1(t))) / C_1 \\ \dot{x}_2(t) &= (G(x_1(t) - x_2(t)) + x_3(t)) / C_2 \\ \dot{x}_3(t) &= -(x_2(t) + R_o x_3(t)) / L + u_3(t) \\ f(x_1(t)) &= G_b x_1(t) + (G_a - G_b)g(x_1(t)) \\ g(x_1(t)) &= \{|x_1(t) + E| - |x_1(t) - E|\} / 2 \end{aligned} \quad (11)$$

Los valores de los parámetros utilizados, son: $C_1 = 5,75 \text{ nF}$, $C_2 = 21,32 \text{ nF}$, $L = 0,012 \text{ H}$, $R_o = 30,86 \text{ } \Omega$, $G_a = -0,879 \text{ mS}$, $G_b = -0,4124 \text{ mS}$, $G = 0,645 \text{ mS}$, $E = 1 \text{ V}$ y las condiciones iniciales: $x_1(0) = 0,001$, $x_2(0) = 0,001$, $x_3(0) = 0,001$. Con las condiciones anteriores (11) presenta comportamiento caótico, cuando $u_3(t) = 0$. El paso de integración empleado ha sido $\Delta t = 10^{-8} \text{ s}$ y la condición de evento utilizada $(x_{1j} - 1)^{\uparrow} = 0$. Se han tomado para los parámetros de control los siguientes valores: $a_{33} = 0,9$ y $k_{33} = 10^5 \text{ s}^{-1}$.

La Fig. 8 representa la evolución temporal de la variable de estado $x_1(t)$ (arriba) y de la señal de control normalizada

$e_3(t)$ (abajo), del sistema de Chua controlado en torno a una UPO, observándose en la gráfica inferior el instante de aplicación del control, y como, cuando la señal de control normalizada disminuye de amplitud, el sistema estabilizado, se aproxima asintóticamente a una UPO.

En la Fig. 9 se observa un retrato de fases formado por las variables de estado $x_1(t)$ y $x_2(t)$ del sistema de Chua estabilizado en torno a una UPO. La gráfica se ha obtenido para el instante de aplicación del control que se observa en la Fig. 8, habiéndose eliminado en la misma el transitorio inicial con objeto de dar mayor nitidez a la UPO estabilizada

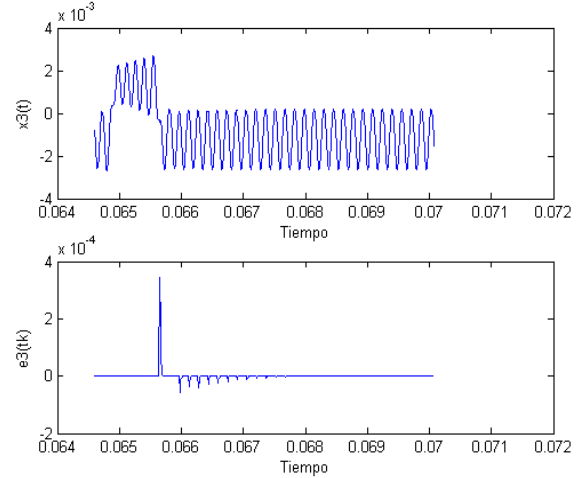


Figura 8. Diagramas temporales de la variable de estado $x_1(t)$ (arriba) y señal de control normalizada (abajo) del atractor de Chua estabilizado en torno a una UPO. Condición de evento $(x_{1j} - 1)^{\uparrow} = 0$. Los valores de los parámetros de control son: $k_{33} = 10^5 \text{ s}^{-1}$, $a_{33} = 0,9$.

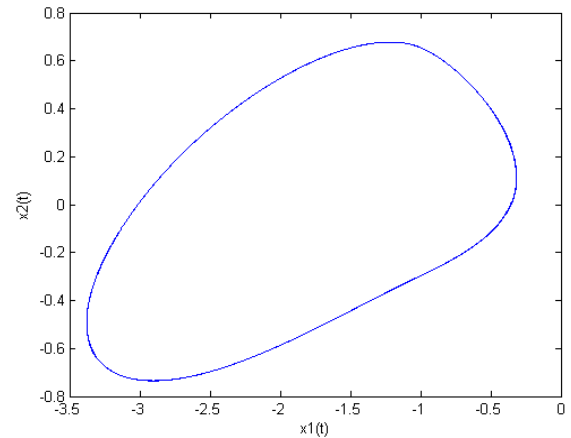


Figura 9. Retrato de fases del sistema de Chua estabilizado en torno a una UPO.

La Fig. 10 representa un retrato de fases formado por las variables de estado $x_1(t)$ y $x_2(t)$ del sistema de Chua estabilizado en la cercanía de una UPO para un instante de

aplicación del control distinto al empleado para obtener la Fig. 9. Como puede observarse la sombra de UPO de la Fig. 10, es diferente a la obtenida en la Fig. 9, ello es debido a que el instante de aplicación del control es distinto en cada caso. El sistema queda estabilizado en torno a una u otra órbita, dependiendo de la cuenca de atracción en la que se encuentre evolucionando la trayectoria una vez aplicado el control.

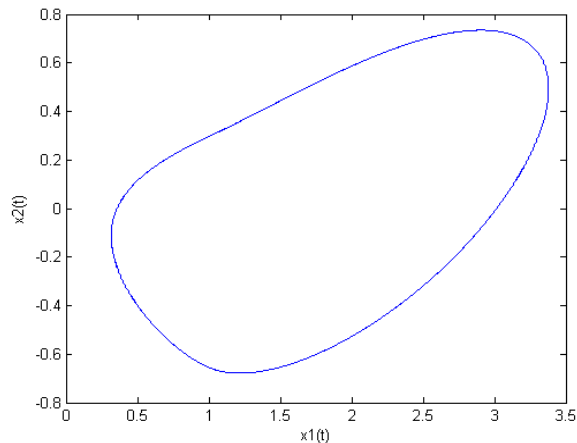


Figura 10. Retrato de fases del sistema de Chua estabilizado alrededor de una UPO diferente a la mostrada en la Fig. 9.

D. Sistema hipercaótico de Rossler

Los sistemas hipercaóticos se caracterizan por tener dos o más exponentes de Lyapunov positivos. En el caso de que el sistema a controlar tenga dos exponentes positivos, un par de trayectorias cercanas del mismo divergen en dos de sus componentes, haciendo más dificultoso el control que cuando éste es aplicado por una sola entrada, no obstante, esto no significa que un sistema hipercaótico no pueda ser controlado aplicando control a una sola entrada. Como ejemplo de proceso hipercaótico a estabilizar, se ha elegido el sistema de Rossler, [28], al cual se va a controlar mediante el método híbrido. Se ha aplicado control por dos entradas del mismo, con objeto de estabilizarlo más robustamente. En general, el control aplicado por múltiples entradas da lugar a un sistema más robusto frente a perturbaciones, como ocurre en este caso. La ley de control en tiempo continuo $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{e}(t)$ se aplica en el lado derecho de la segunda y cuarta ecuación, quedando éste expresado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_2(t) - x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + ax_2(t) + x_4(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= b + x_1(t)x_3(t) \\ \dot{x}_4(t) &= -cx_3 + dx_4(t) + u_4(t) \end{aligned} \quad (12)$$

Los valores de los parámetros utilizados han sido: $a = 0,25$, $b = 3$, $c = 0,5$, $d = 0,05$ y las condiciones iniciales escogidas: $x_1(0) = 0,5$, $x_2(0) = 0,5$, $x_3(0) = 0,5$, $x_4(0) = 0,5$. Con las condiciones iniciales y parámetros

indicados, (13) presenta comportamiento hipercaótico cuando las entradas de control son nulas, es decir, $u_2(t) = 0$ y $u_4(t) = 0$. Para la simulación del sistema de control se ha empleado un paso de integración de $\Delta t = 10^{-3} s$. La condición de evento utilizada para el sistema de control ha sido $(x_{1j})^\dagger = 0$. Se han tomado para los parámetros de control los siguientes valores: $a_{22} = 0,8$, $a_{44} = 1,02$, $k_{22} = 1000 s^{-1}$, $k_{24} = 1000 s^{-1}$.

En la Fig. 11 se observa la evolución temporal de las variables de estado $x_3(t)$ (arriba) y una de las señales de control normalizada $e_3(t)$ (abajo) del sistema hipercaótico de Rossler. Como puede apreciarse, la amplitud de la señal de control es muy pequeña, lo cual indica, que la respuesta del sistema controlado se encuentra evolucionando muy cerca de una UPO de periodo uno.

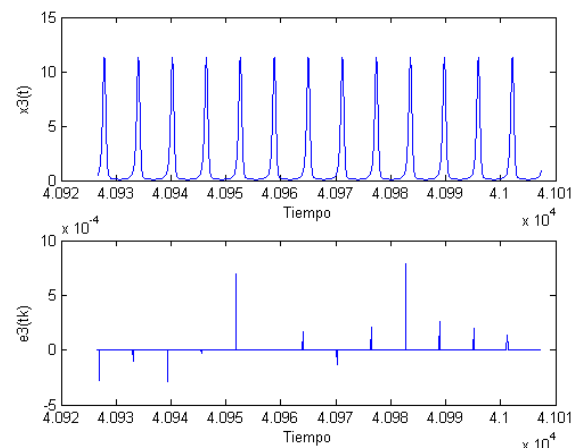


Figura 11. Diagramas temporales de la variable de estado $x_3(t)$ (arriba) y señal de control normalizada $e_3(t)$ (abajo) del atractor hipercaótico de Rossler. La condición de evento ha sido $(x_{1j})^\dagger = 0$ y los valores de los parámetros de control utilizados: $a_{22} = 0,8$, $a_{44} = 1,02$, $k_{22} = 1000 s^{-1}$, $k_{44} = 1000 s^{-1}$.

En la Fig. 12 se muestra el retrato de fases correspondiente, habiéndose eliminado en el mismo el transitorio inicial, como en todos los casos tratados aquí.

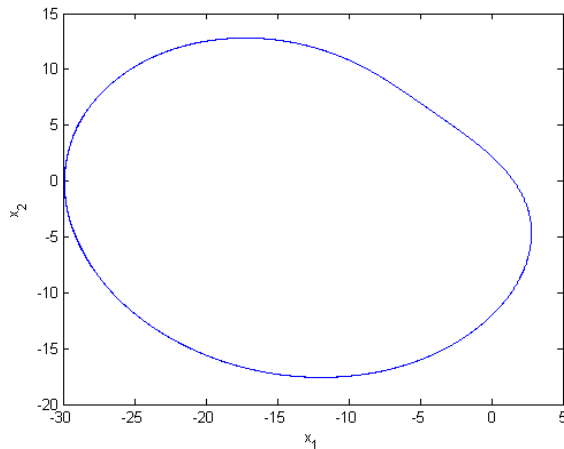


Figura 12. Retrato de fases del sistema hipercaótico de Rossler controlado en torno a una UPO de periodo uno.

En la Fig. 13 se observa la evolución temporal de las variables de estado $x_3(t)$ (arriba) y de la señal de control normalizada $e_3(t)$ (abajo) del sistema hipercaótico de Rossler estabilizado en torno a una UPO de periodo dos. El instante de aplicación del control fue distinto al empleado en la obtención de la Fig. 11.

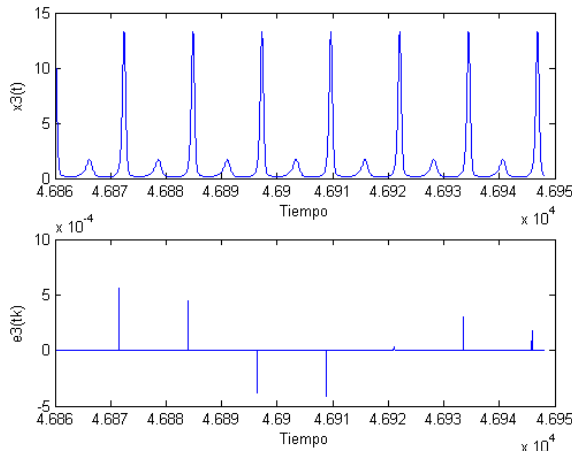


Figura 13. Diagramas temporales de la variable de estado $x_3(t)$ (arriba) y señal de control normalizada $e_3(t)$ (abajo) del atractor hipercaótico de Rossler. La condición de evento utilizada ha sido $(x_{1j})^\dagger = 0$ y los valores de los parámetros de control utilizados son: $a_{22} = 0,8$, $a_{44} = 1,02$, $k_{22} = 1000 \text{ s}^{-1}$, $k_{44} = 1000 \text{ s}^{-1}$.

En la Fig. 14 se tiene un retrato de fases correspondiente al instante de aplicación del control que se observa en la Fig. 13, donde se puede ver la órbita periódica estabilizada en torno a una UPO de periodo dos. Como en los demás casos tratados, el algoritmo de control híbrido se ha aplicado para periodo uno, es decir, las condiciones iniciales del controlador analógico cambian cada vez que se cumple la condición de evento, sin embargo, la órbita obtenida es de periodo dos, ello es debido a que la órbita es de periodo uno con respecto a la

hipersuperficie de control utilizada.

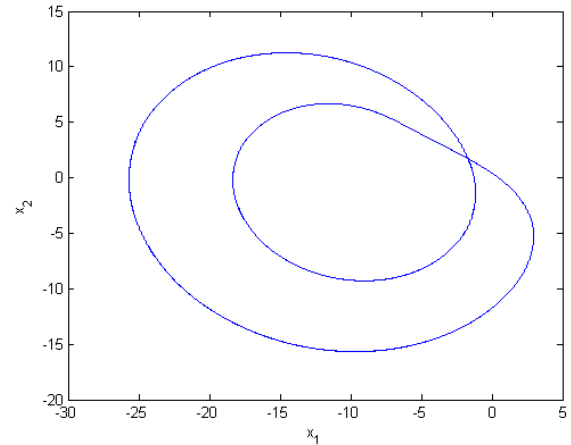


Figura 14. Retrato de fases del sistema hipercaótico de Rossler controlado en torno a una UPO de periodo dos.

VI. EFECTOS DEL RUIDO

El ruido asociado a las medidas de las variables que proporcionan la condición de evento, es la principal causa de que la respuesta de salida de la planta pudiera no quedar controlada en torno a una UPO, ya que el ruido podría disparar la condición de evento sin que hubiera transcurrido el tiempo de vuelo. El efecto adverso del ruido de medida, en el buen funcionamiento del sistema de control, se puede atenuar mediante filtros o inhibiendo, durante un intervalo de tiempo dado, la condición de evento [22]. Como ejemplo de sistema con ruido de medida añadido se ha escogido el sistema caótico OPWM. En este caso, al sistema de control no se le ha aplicado ningún tipo de atenuador de ruido. Para efectuar la simulación de ruido, se han tomado las medidas de las variables de estado utilizadas por el controlador, de la forma $\mathbf{x}_m(t) = \mathbf{x}(t)(1 + \rho)$, siendo ρ un número aleatorio de media cero y distribución uniforme, comprendido entre ± 0.05 y que representa el porcentaje de ruido en el valor medido.

En la Fig. 15 se observa una sombra de UPO del sistema caótico OPWM simulado con los mismos parámetros y condiciones iniciales que los empleados para obtener la Fig. 6, pero con un nivel de ruido de $\pm 5\%$ añadido a las variables de estado empleadas en el control. La gráfica se ha obtenido una vez pasado el transitorio.

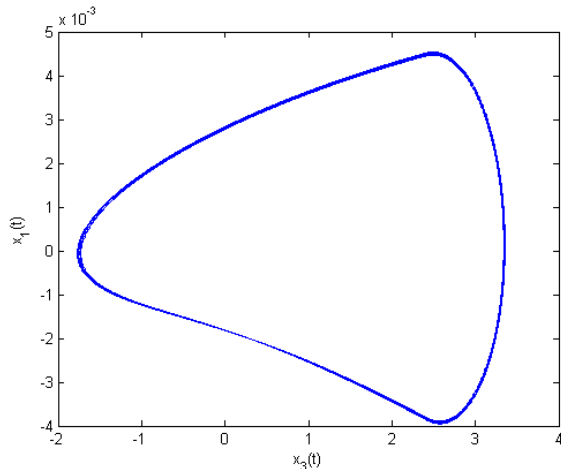


Figura 15. Retrato de fases del sistema OPWM estabilizado en torno a una UPO, con ruido de medida añadido a las variables de control de $\pm 5\%$.

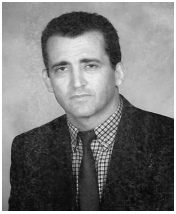
VII. CONCLUSIONES

Se ha presentado un nuevo método de control de caos e hipercaos basado en un controlador híbrido analógico-digital que estabiliza sistemas caóticos en torno a UPOs no conocidas a priori y de periodo uno o mayor. Al ser un sistema de control híbrido el vector de salida del proceso controlado se muestrea cada vez que se cumple la condición de evento y por tanto no es necesario hacerlo en todo instante del tiempo, ello permite estabilizar sistemas caóticos e hipercaóticos en torno de UPOs de evolución más rápida, que en el caso de haber utilizado solamente un controlador digital, ya que la máxima velocidad de muestreo disponible en el controlador digital, haría imposible la estabilización de determinados procesos caóticos de rápida evolución temporal. Se ha implementado un algoritmo que facilita la aplicación del método de control en sistemas caóticos e hipercaóticos. Se ha extendido el método para estabilizar órbitas conocidas previamente, como en los métodos OGY [1] y Pyragas [2]. Se han presentado varios ejemplos de simulación numérica, de sistemas caóticos con el control híbrido aplicado y un caso ilustrativo de control con ruido de medida, añadido a las variables de estado utilizadas por el controlador. Queda pendiente para trabajos futuros, un análisis teórico de estabilidad y la implementación experimental del controlador híbrido.

REFERENCIAS

[1] E. Ott, C. Grebogi and J.A. Yorke, "Controlling chaos", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, no. 11, pp. 1196-1199, 1990.
 [2] K. Pyragas, "Continuous control of chaos self-controlling feedback", *Phys Lett.* vol. A no. 170 pp. 421-428, 1992.
 [3] K. Pyragas, "Control of chaos via extended delay feedback", *Phys. Lett. A*, "206: 323-330, 1992.
 [4] X. Yu, "Tracking inherent periodic orbits in chaotic dynamic systems via adaptive variable structure time-delayed self control," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 46, pp. 1408-1411, Nov. 1999.
 [5] T. Ushio, "Limitation of delayed feedback control in nonlinear discrete time systems", *IEEE Trans. Circ. Sys. I*, vol. 43, pp. 815-816, 1996.

[6] J. A. Gallegos, J. A. Gallegos and O. P. Mejía, "Chaos Suppression Of An Underactuated Manipulator: Experimental Results," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 2, no. 1, pp. 19-24, March 2004
 [7] J. Güemez and M.A. Matias "Control of chaos in unidimensional maps". *Physical Review A*, vol. 181, number 1, pp. 29 -32, 1993.
 [8] M.A. Matias and J. Güemez, "Stabilization of chaos by proportional pulses in system variables". *Physical Review Letters*, volume 72, Number 10 pp. 1455 -1458, 1994.
 [9] M.A. Matias and J. Güemez, "Chaos suppression in flows using proportional pulses in the system variables" *Physical Review E*, volume 54, Number 1 pp. 198- 209, 1996.
 [10] González López, R., "Estudio de Osciladores Electrónicos Autónomos: Aplicación a un Oscilador de Puente de Wien Modificado", Tesis doctoral dirigida por M. Sánchez Carrilero. Escuela Superior de Ingeniería. Universidad de Cádiz. Julio, 1998.
 [11] A. Kozlov, G. Osipov and V. Shalfeer, "Suppresing Chaos Shalfeer, in continuous systems by impluse control," *VIEEE Proc. of the 1st Internatinal Conference on Control of Oscillations and Chaos*, vol. 3, pp. 578-581, 1997.
 [12] T. Yang, "Impulsive Control," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, n. 5 pp. 1081-1083, 1999.
 [13] J. T. Sun and Y. P. Zhang, "Stability analysis of impulsive control systems," *IEEE Proc. Control Theory Appl.*, vol. 150, pp. 331-334 2003.
 [14] T. Ushio and S. Yamamoto, "Prediction-based control of chaos." *Physics Letters A*, 264, pp. 30-35, 1999.
 [15] Yu-ping Tian, Xinghuo Yu, "Time delayed impulsive stabilization of unstable periodic orbits in chaotic hybrid systems." *Chaos Control. Theory and applications*. Editors. Guanrong Chen, Xinghuo Yu. Springer-Verlang Berlin Heidelberg New York. ISBN 3-540-40405-8. 2003.
 [16] T. Kapitaniac, "Synchronization of chaos using continuous control". *Phys. Rev. E* 50, pp. 1642-1644. 1994.
 [17] M. Prian, R. González, V. Sánchez, E. Romero, N. Mora, M.A. Fernández y J.L. Rojas. "Regulación automática de sistemas caóticos". *Actas de las IV jornadas científicas en tecnología de la información*. Cádiz. pp. 68-73. 2000.
 [18] C. Piccardi and S. Rinaldi: "Optimal control of systems via peak-to-peak maps", *Physica D*, 144 (2000) 298-308.
 [19] C. Piccardi and S. Rinaldi: "The impact of noise and sampling frequency on the control of peak-to-peak dynamics" *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 12, no. 6 pp. 1579-1586, 2003.
 [20] M. Prian, M.L. López, "Aproximación al control de sistemas dinámicos complejos", Memoria de doctorado. Evaluación Global. Universidad de Cádiz. 2005.
 [21] M.J. Lopez, M. Prian and F.M. Verdulla, "Chaos Control Method". *Internal Report*. Nov. 2006. Dpto. de Ing. de Sistemas y Automática. Universidad de Cádiz.
 [22] M.J. López, F.M. Verdulla and M. Prian, "Chaos control based on nonlinear state feedback and linear H-infinite controller synthesis". *WSEAS Transactions and systems*, Issue 1, vol. 6, pp. 68-75, ISSN 1109-2777, 2007.
 [23] F.M. Verdulla, M.J. López y M. Prian, "A pulse control method for chaotic systems". *IEEE Latin America Transactions*, Vol. 7, No 1, pp 1-11. 2009.
 [24] Freddy Chistiansen and Hands Henrie Rugh. "Computing Lyapunov spectra with continuous Grand-Schmidt orthonormalization". *Nonlinearity* 10: 1063-1072. 1995
 [25] E.N. Lorenz, "Deterministic nonperiodic flow", *Journals of the admosferic sciences*, vol. 20 pp. 130 141, 1963.
 [26] R. González, M. Prian, M.A. Fernández, J.L. Rojas and E. Romero, "A symmetric piecewise-linear chaotic system with a single equilibrium point." *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 15, no. 4 pp. 1411-1415, 2005.
 [27] L.O. Chua M. Komuro and T. Matsumoto, "The double scroll family". *IEEE transactions on circuits and systems*, vol. CAS-33, no. 11, pp. 1073 1118. 1986.
 [28] OE Rössler, "An equation for Hipercaos", *Physics Letters A*, 71, 155-157, 1979.



Manuel Prián Rodríguez es Ingeniero Técnico Industrial (Electrónica Industrial) (1982) e Ingeniero Superior (2003) por la Universidad de Cádiz. Es miembro de la Red Temática Iberoamericana de Criptografía y Seguridad de la Información. En la actualidad es Profesor Titular de Escuela Universitaria de la Universidad de Cádiz. Su actividad investigadora principal está centrada en sincronización, control y aplicaciones de sistemas caóticos e hipercaóticos.



sistemas caóticos.

Manuel J. López Sánchez (As' 91) es Licenciado en Ciencias Físicas (UNED, 1986). Realizó su Tesis Doctoral en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad de Sevilla (1994). Actualmente es Profesor Titular de la Universidad de Cádiz. Antes de su incorporación a la Universidad trabajó en el sector industrial en el diseño de sistemas de control. Sus líneas de investigación están centradas en el control robusto de procesos industriales y



Francisco Moreno Verdulla es Ingeniero Técnico Industrial (Electrónica Industrial) (1974) por la Universidad de Sevilla, e Ingeniero Superior (2001) por la Universidad de Cádiz. Trabajó en el Real Observatorio de la Armada (ROA) donde se diplomó en Astronomía y Geofísica (1984). Actualmente es profesor de la Universidad de Cádiz; su actividad investigadora está orientada al diseño de controladores para sistemas caóticos.