

Stabilization of the Generalized Benders Decomposition applied to Short-Term Hydrothermal Coordination Problem

A. J. Rubiales, P. A. Lotito, *Member*, IEEE, L. A. Parente

Abstract— Solving the Short Term Hydrothermal Coordination (STHTC) Problem considers the resolution of both the Unit Commitment (UC) and the Economic Dispatch (ED) for thermal and hydraulic units. In order to avoid post-dispatch corrections, the transmission network is modeled with a high level of detail considering an AC power flow. These facts lead to a very complex optimization problem which is solved by using a novel decomposition approach which combines Generalized Benders Decomposition (GBD) with Bundle methods. This proposed method resembles a stabilized version of the cutting planes method, which drastically reduces the well-known tailing-off effect that Benders methods have. The approach presented in this work allows the decomposition of the whole problem in a quadratic mixed integer master problem, and in a non-linear subproblem which should be separable. The former defines the state and the active power dispatched by each unit whereas the latter determines the reactive power to meet the electrical constraints through a modified AC optimal power flow (OPF). These approaches were applied to a 9-bus test case, and to the IEEE 24-bus test case. The problem is solved for a time horizon of a day with a one-hour step.

Keywords— Short Term Hydrothermal Coordination, Unit Commitment, Generalized Benders Decomposition, Bundle Methods.

I. INTRODUCCIÓN

EL DESPACHO Hidrotérmico de Corto Plazo (STHTC por sus siglas en inglés) considerando una operación centralizada ha sido utilizado por muchos países del mundo, y especialmente en latinoamérica [31]. Este problema consiste en determinar el estado de operación y el nivel de potencia de las unidades de generación (hidráulicas y térmicas) de un sistema interconectado logrando el menor costo operativo, respetando todas las restricciones técnicas y operativas de los generadores, de la red de transmisión, etc.

La fuerte no-linealidad y la gran escala del modelo han generado distintos problemas para la resolución directa del STHTC a través de *solvers* comerciales (como por ejemplo DICOPT o SBB) sin llegar nunca al menos a una solución viable, por lo cual no parece posible resolverlo sin apelar a técnicas de descomposición. El objetivo de este trabajo es demostrar la ventaja de la descomposición propuesta independientemente del código numérico utilizado.

Este problema ha sido estudiado a lo largo de los años considerando distintas definiciones y aplicando distintos

métodos de resolución. Las formulaciones más sencillas, que fueron el punto de partida para este campo de investigación, consideraban modelos simples que no se correspondían con las características reales de los sistemas eléctricos. Entre estas formulaciones se encuentra [35], la cual es un enfoque netamente académico que sólo considera unidades térmicas y se resuelve utilizando una lista ordenada por mérito. Esto significa que las unidades son despachadas de manera creciente ordenadas por costo de Megawatt producido. Este enfoque dista notablemente de los utilizados en los sistemas reales debido a que no considera restricciones intertemporales (como mínimos períodos de operación de las centrales térmicas, o costos de encendido); o el hecho de que las unidades térmicas no funcionan a un nivel de producción constante. Otras técnicas de optimización clásicas que han sido utilizadas en la literatura son: programación dinámica, métodos basados en relajación lagrangiana y descomposición de Benders.

La utilización de programación dinámica fue también mencionada en [35]. Presenta las ventajas de poder modelar funciones objetivos y restricciones muy complejas, es fácil de entender e implementar como así también de integrarla y combinarla con otros métodos de optimización. Si bien permite modelar problemas no-lineales, no-convexos, por su naturaleza combinatoria [17] sólo se puede considerar un número reducido de unidades térmicas si se desea tener tiempos razonables de cálculo, lo cual la hace inviable para problemas de gran tamaño, como es el caso de STHTC. En [29] se presenta este problema considerando la aplicación a sistemas que poseen centrales hidroeléctricas de bombeo. En este artículo se menciona el problema de la dimensionalidad y se sugiere para su resolución el enfoque presentado en [20].

Si bien la aplicación de Relajación Lagrangeana al problema de despacho económico se viene realizando desde mediados de los noventa, trabajos que consideren cuestiones de red pueden verse recién en los últimos siete años. Por ejemplo, en [24] se presenta el problema de despacho y unit commitment resuelto por una variación de la relajación lagrangeana denominada ILR por *Improved Lagrangian Relaxation*. La misma se aplica sólo a unidades térmicas considerando restricciones de red DC y se muestran resultados aplicándola al caso de prueba de 24 barras de la IEEE. En [21] se aplica la relajación lagrangeana y el método de Benders para resolver el problema de *unit commitment* sobre un conjunto de unidades sólo térmicas y considerando de manera detallada la red. Este algoritmo se aplicó a un caso de 118 barras con un horizonte de tiempo de 24 horas. Dentro de los

Aldo J. Rubiales, CONICET y PLADEMA UNCPBA, Tandil, Argentina, arubiale@exa.unicen.edu.ar

Pablo A. Lotito, CONICET y PLADEMA UNCPBA, Tandil, Argentina, plotito@exa.unicen.edu.ar

Lisandro A. Parente, CIFASIS-CONICET y UNR, Rosario, Argentina, parente@cifasis-conicet.gov.ar

trabajos más recientes que consideran unidades hidroeléctricas, se encuentra [13] donde se combina la utilización de relajación lagrangeana con programación cuadrática secuencial. En este último caso, si bien se modelan con un alto grado de detalle las características de las centrales hidroeléctricas, no se consideran las características de la red.

En los últimos años y debido al auge que tienen los métodos basados en la descomposición de Benders para la descomposición de problemas de grandes dimensiones, se presentaron distintos trabajos que tratan el despacho a corto plazo utilizando Descomposición Generalizada de Benders [14]. En [22] se presentan algoritmos basados en esta técnica que consideran los flujos de potencias AC en la red pero generados sólo por unidades térmicas. En [10] se presenta un método basado en la descomposición de Benders multietapa para resolver el problema de coordinación hidrotérmica. En esta representación, se modela en detalle el sector hidroeléctrico pero se aplica un modelo lineal DC de las pérdidas de las líneas de transmisión. Uno de los primeros trabajos que considera la aplicación de la Descomposición Generalizada de Benders al problema de STHTC considerando restricciones de redes AC, es [32] con muy buenos resultados. Uno de los problemas mencionados en este trabajo es la lenta convergencia del algoritmo debido al conocido *tailing-off effect* que presenta este esquema de resolución. En [31] se disminuye este efecto aplicando distintas heurísticas de aceleración de la convergencia.

El presente trabajo se organiza de la siguiente manera. En las siguientes dos secciones se presenta la nomenclatura utilizada y la formulación del problema de STHTC abordado, detallando su función objetivo y sus restricciones. A su vez, en la sección 3 se presentan las consideraciones realizadas para la simplificación de algunos de los detalles de la red de manera de no perder generalidad ni realismo. En la sección 4 se detalla el método de resolución propuesto en este trabajo y los fundamentos teóricos de resolución y convergencia del mismo. La aplicación de la metodología propuesta se presenta en la sección 5 y finalmente en la sección 6 se mencionan los conclusiones y posibles extensiones.

II. NOMENCLATURA

A. Conjuntos

- $t \in T$ intervalos de tiempos asociados al horizonte de planificación.
- $i \in I$ unidades térmicas.
- $j \in J$ unidades hidroeléctricas.
- $b, b' \in B$ barras del sistema.
- $C_i(b)$ unidades térmicas conectadas directamente a la barra b .
- $C_h(b)$ unidades hidroeléctricas conectadas directamente a la barra b .

- $C_b(b)$ barras del sistema conectadas directamente a la barra b .
- $r \in R$ reservorios o embalses del sistema.

B. Variables

- $pt_{t,i}$, $ph_{t,i}$ potencia activa generada por la unidad térmica i (hidráulica j) en el período t .
- $ut_{t,i}$, $uh_{t,j}$ variable binaria que indica el estado de la unidad térmica i (hidráulica j) en el período t .
- $st_{t,i}$ variable binaria que indica si la unidad térmica i fue encendida en el período t .
- $et_{t,i}$ variable continua que se utiliza con el objetivo de determinar en qué momento la unidad i entra o sale de servicio.
- $qt_{t,i}$, $qh_{t,j}$ potencia reactiva generada por la unidad térmica i (hidráulica j) en el período t .
- $\mathcal{E}p_{t,b}^-$, $\mathcal{E}p_{t,b}^+$ déficit y exceso de potencia activa en la barra b en el tiempo t .
- $\mathcal{E}q_{t,b}^-$, $\mathcal{E}q_{t,b}^+$ déficit y exceso de potencia reactiva en la barra b en el tiempo t .
- $a_{t,r}$ volumen de agua que contiene el embalse r en el tiempo t .
- $q_{t,r}^T$ volumen de agua turbinado durante el intervalo de tiempo t en el embalse r .
- $q_{t,r}^S$ volumen de agua que se virtió el tiempo t del embalse r .
- $v_{t,b}$ nivel de tensión en la barra b en el período t .
- $\theta_{t,b}$ valor del ángulo para el período t en la barra b .
- $P_{t,bb'}$ parte real del flujo de potencia (activa) presente en la línea entre las barras b y b' .
- $Q_{t,bb'}$ parte compleja del flujo de potencia (reactiva) presente en la línea entre las barras b y b' .
- $\mu_{t,i}^k$ multiplicador asociado a la potencia activa de la unidad térmica i en el tiempo t y en el corte generado en la iteración k .
- $\lambda_{t,j}^k$ multiplicador asociado a la potencia activa de la unidad hidráulica j en el tiempo t y en el corte generado en la iteración k .
- $\pi_{t,i}^k$ multiplicador asociado al estado de la unidad térmica i en el tiempo t y en el corte generado en la iteración k .

- $\psi_{t,j}^k$ multiplicador asociado al estado de la unidad hidráulica j en el tiempo t y en el corte generado en la iteración k .

C. Parámetros

- A_i, B_i, C_i coeficientes asociados al término cuadrático, lineal e independiente de la función de costos de la unidad i .
- D_i coeficiente asociado al costo de encendido de la unidad i .
- Ep^-, Ep^+ coeficientes de penalización asociados al déficit y exceso de potencia activa.
- Eq^-, Eq^+ coeficientes de penalización asociados al déficit y exceso de potencia reactiva.
- pt_i^{LOW}, pt_i^{UP} límites mínimo y máximo de generación de potencia activa para la unidad térmica i .
- qt_i^{LOW}, qt_i^{UP} límites mínimo y máximo de generación de potencia reactiva para la unidad térmica i .
- ph_i^{LOW}, ph_i^{UP} límites mínimo y máximo de generación de potencia activa para la unidad hidroeléctrica j .
- qh_i^{LOW}, qh_i^{UP} límites mínimo y máximo de generación de potencia reactiva para la unidad hidroeléctrica j .
- on_i^{LOW} tiempo mínimo de operación para la unidad i .
- off_i^{LOW} tiempo mínimo fuera de servicio para la unidad i .
- ΔPT_i^{UP} límite asociado a la diferencia de generación para la unidad térmica i entre dos tiempos consecutivos dados.
- ζ_t reserva rotante del sistema asociada al tiempo t .
- $\Psi p_{t,b}^-, \Psi q_{t,b}^-$ demanda de potencia activa y reactiva asociada al tiempo t en la barra b .
- $G_{b,b'}$ y $B_{b,b'}$ parte real y compleja de la matriz de admitancia para la línea en la posición $b \rightarrow b'$.
- a_r^{LOW}, a_r^{UP} volumen mínimo y máximo del embalse r .
- v_b^{LOW}, v_b^{UP} tensión mínima y máxima de la barra b .
- $\Omega_{b,b'}^{UP}$ límite de flujo de potencia activo para la línea que une las barras $b \rightarrow b'$.
- $q_{t,r}^I$ volumen de agua que ingresa en el intervalo de tiempo t en el embalse r .

- v_b^{LOW}, v_b^{UP} límite mínimo y máximo de tensión para la barra b .
- $\Omega_{b,b'}^{UP}$ límite de flujo de potencia en la línea que une las barras b y b' .
- β_j coeficiente lineal que relaciona el caudal de agua que pasa a través de la turbina y la potencia generada en cada unidad hidráulica j .

En función de hacer más clara la definición del modelo no se mencionó el dominio de los índices en las fórmulas y las ecuaciones. Si no se define lo contrario, cada valor posible del índice en el correspondiente conjunto de valores del dominio debe ser considerado.

III. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

El STHTC aplicado a mercados eléctricos centralizados se define en la presente sección. La función objetivo del problema de minimización está dada por (1). La misma se corresponde con el costo asociado a la producción térmica de la electricidad necesaria para satisfacer una demanda fija, la cual es estimada en cada intervalo de tiempo. En este trabajo se consideran los costos asociados al consumo de combustible de las unidades térmicas y el costo de arranque de estas unidades de la siguiente manera:

$$fo = \sum_t \sum_i P_{t,i}(pt_{t,i}, ut_{t,i}, st_{t,i}) \quad (1)$$

$$P_{t,i} = A_i pt_{t,i}^2 + B_i pt_{t,i} + C_i ut_{t,i} + D_i st_{t,i} \quad (2)$$

Los costos asociados a la electricidad generada por cada unidad térmica i se modelan con una curva cuadrática. La manera en que se modelan las penalizaciones por incumplimiento de la demanda se presentará en la siguiente sección y no sólo permite incorporar costos asociados a no poder suministrar potencia activa o reactiva en el sistema, sino que también simplifica la resolución del problema al evitar caer en soluciones infactibles. Esto último se debe a que bajo cualquier condición de despacho se permite cerrar el balance de potencia (activa y/o reactiva). En las siguientes secciones, al explicar la metodología de resolución, se analizarán las ventajas de evitar la ocurrencia de infactibilidades y por qué este hecho es deseable para el método de descomposición propuesto.

En fo los costos asociados a las unidades hidráulicas no son considerados. Esto se debe a que la electricidad generada por estas unidades deriva de la energía potencial del agua que cae desde el embalse de la unidad y no consume ningún tipo de combustible. Sin embargo, la utilización del agua para generar energía hidroeléctricamente en un momento dado compromete el uso del agua en tiempos futuros y viceversa. La cuestión principal es conocer la cantidad total de agua a utilizar durante el período de planificación. En la literatura existen dos maneras de considerar esta cuestión [35]. La primera considera que el monto total de agua se encuentra disponible en el corto plazo, pero se le asigna un valor al

volumen de agua que no es turbinada de manera de incentivar a las plantas hidroeléctricas a reservar agua para su utilización más allá del horizonte de planificación. El segundo enfoque considera que un monto fijo y conocido de agua se encuentra disponible para ser utilizada en el horizonte de planificación (obviamente, menor al volumen total de agua en el embalse) como resultado de una programación de largo plazo que considere otros aspectos (incertidumbre en el clima, demanda, etc.) En este trabajo se adoptó el segundo enfoque evitando la necesidad de asignarle un valor al agua. Este volumen fijo de agua disponible durante el horizonte de análisis es considerado en la definición del volumen inicial y final para cada embalse.

Las restricciones del problema fueron divididas en cinco grupos los cuales se detallan a continuación.

A. Restricciones asociadas sólo a las plantas térmicas

En la ecuación (3) se presentan las restricciones de caja asociadas a la potencia activa de cada central térmica.

$$ut_{t,i}pt_i^{LOW} \leq pt_{t,i} \leq ut_{t,i}pt_i^{UP}. \quad (3)$$

Como se puede observar, dada la discontinuidad que presenta la potencia de una unidad térmica, se hace necesario introducir variables binarias con el fin de representar adecuadamente la operación de los posibles estados de operación.

La ecuación (4) representa las restricciones de caja asociadas a la potencia reactiva de cada central térmica. Al igual que para la potencia activa se deben introducir variables binarias con el fin de representar los posibles estados de operación.

$$ut_{t,i}qt_i^{LOW} \leq qt_{t,i} \leq ut_{t,i}qt_i^{UP}. \quad (4)$$

Con el objetivo de determinar en qué momento la unidad entra o sale de servicio en (5) se definen la variable binaria $st_{t,i}$ y la continua $et_{t,i}$ (entre 0 y 1). Más precisamente, $st_{t,i}$ toma el valor 1 si la unidad i se enciende en el tiempo t (es 0 en los otros casos), y $et_{t,i}$ es igual a 1 si la misma se apaga en ese tiempo. Pese a que la variable $et_{t,i}$ se define como continua, de la condición (5) se deduce que sólo asumirá los valores 0 y 1. La relajación en la definición es estándar y tiene la ventaja de reducir las bifurcaciones que producirá el considerarla variable binaria. Estas variables no sólo fueron introducidas para considerar el costo de arranque de una unidad térmica, sino también (como se verá en las próximas dos restricciones) para modelar los tiempos mínimos de prendido o apagado permitidos por cada unidad.

$$\begin{aligned} ut_{t,i} - ut_{t-1,i} &= st_{t,i} - et_{t,i} \\ st_{t,i} + et_{t,i} &\leq 1 \end{aligned} \quad (5)$$

En las ecuaciones (6) y (7) se presentan las restricciones asociadas a los tiempos mínimos de operación y tiempos mínimos fuera de servicio.

$$ut_{t,i} + ut_{t+1,i} + \dots \quad (6)$$

$$+ ut_{t+on_i^{LOW}-1,i} \geq st_{t,i} on_i^{LOW}$$

$$(1 - ut_{t,i}) + (1 - ut_{t+1,i}) + \dots \quad (7)$$

$$+ (1 - ut_{t+off_i^{LOW}-1,i}) \geq et_{t,i} off_i^{LOW}$$

La ecuación (8) define el máximo cambio de nivel de potencia de cada unidad térmica de un periodo al siguiente.

$$-\Delta PT_i^{UP} \leq (pt_{t-1,i} - pt_{t,i}) \leq \Delta PT_i^{UP} \quad (8)$$

B. Restricciones asociadas sólo a las plantas hidráulicas

Las ecuaciones (9) y (10) representan las restricciones de caja asociadas a la potencia activa y reactiva de las plantas de generación hidráulica.

$$uh_{t,j}ph_j^{LOW} \leq ph_{t,j} \leq uh_{t,j}ph_j^{UP}, \quad (9)$$

$$uh_{t,j}qh_j^{LOW} \leq qh_{t,j} \leq uh_{t,j}qh_j^{UP}. \quad (10)$$

La ecuación (11) representa la relación lineal entre el caudal turbinado y la potencia generada por cada central hidroeléctrica.

$$ph_{t,j} = q_{t,j}^T \beta_j. \quad (11)$$

Cuando se trata de representar este tipo de relación se presentan varios enfoques. En aquellos que se aplican a sistemas mayormente abastecidos por centrales hidráulicas, como el de Brasil, se le da gran importancia al modelado de esta relación [9]. En nuestro caso, la expresión para modelar la generación de energía hidroeléctrica es simple, de manera que permita resolver el problema de optimización utilizando técnicas de descomposición y de tener los parámetros necesarios para su correcto modelado. Si bien es lineal (puede ser seccionalmente lineal), es la utilizada en la mayoría de los trabajos referenciados en donde el sistema considerado es principalmente térmico. En otros trabajos, dada la naturaleza lineal de la función de producción para el caso de centrales de gran caída, muchas veces se elimina la variable caudal dejando todo en función de la variable que representa el nivel de potencia generado con la finalidad de reducir el número de variables y hacer el problema más compacto. Algunas veces (como en este trabajo) por razones de claridad se prefiere mantener de manera explícita la variable que representa el caudal.

C. Restricciones asociadas a ambos tipos de generación

La restricción representada en (12) esta asociada a la reserva rotante del sistema.

$$\begin{aligned} & \sum_i (ut_{i,i} pt_{i,i}^{UP} - pt_{i,i}) + \\ & \sum_j (uh_{i,j} ph_{i,j}^{UP} - ph_{i,j}) \geq \zeta_i. \end{aligned} \quad (12)$$

A través de las ecuación (13) se obtiene un sistema de ecuaciones por barra b que vincula las inyecciones de potencia activa con los ángulos y módulos de las tensiones. Esta ecuación representa el balance nodal de potencia activa para cada período, donde $P_{i,b,b'}$ (14) representa la parte real del flujo de potencia (activa) presente en la línea que une las barras b y b' . El conjunto $cb(b)$ sobre el cual se aplica la sumatoria, se corresponde con las barras conectadas directamente a la barra b .

$$\begin{aligned} & \sum_{ib \in ct(b)} pt_{i,ib} + \sum_{jb \in ch(b)} ph_{i,jb} + \\ & + \Psi p_{i,b} = \sum_{b' \in cb(b)} P_{i,b,b'} \end{aligned} \quad (13)$$

donde

$$\begin{aligned} P_{i,b,b'} = v_{i,b} v_{i,b'} & \left(G_{b,b'} \cos(\theta_{i,b} - \theta_{i,b'}) \right. \\ & \left. + B_{b,b'} \sin(\theta_{i,b} - \theta_{i,b'}) \right) \end{aligned} \quad (14)$$

La ecuación (15) representa el balance nodal de potencia reactiva para cada período, donde $Q_{i,b,b'}$ (16) representa la parte compleja del flujo de potencia (reactiva) presente en la línea que une las barras b y b' .

$$\begin{aligned} & \sum_{ib \in ct(b)} qt_{i,ib} + \sum_{jb \in ch(b)} qh_{i,jb} + \Psi q_{i,b} \\ & = \sum_{b' \in cb(b)} Q_{i,b,b'} \end{aligned} \quad (15)$$

donde

$$\begin{aligned} Q_{i,b,b'} = v_{i,b} v_{i,b'} & \left(G_{b,b'} \sin(\theta_{i,b} - \theta_{i,b'}) \right. \\ & \left. - B_{b,b'} \cos(\theta_{i,b} - \theta_{i,b'}) \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Una explicación más detallada acerca de cómo estas ecuaciones (13-16) se definieron esta fuera del alcance de este trabajo y se presenta en libros clásicos del área como lo son [35] y [15]. Las ecuaciones (9) y (10) representan las restricciones de caja.

D. Restricciones relacionadas con las cuestiones hidráulicas

La ecuación de continuidad o balance hídrico de los embalses se presenta en (17) y considera un embalse por central aunque puede ser extendido fácilmente a varias unidades para el mismo embalse. El volumen inicial y final de

agua para cada embalse es fijo y es resultado de una programación de largo plazo como fue mencionando en la sección anterior.

$$a_{t+1,r} = a_{t,r} + \Delta T (q_{t,r}^I - q_{t,r}^T - q_{t,r}^S). \quad (17)$$

La ecuación (18) representa las restricciones de caja asociadas al volumen del embalse.

$$a_r^{LOW} \leq a_{t,r} \leq a_r^{UP} \quad (18)$$

E. Restricciones asociadas a cuestiones de la red

Las restricciones asociadas con la capacidad de las líneas de transmisión y transformadores se definen en (19), mientras que las tensiones permitidas para cada barra se consideran en (20).

$$-\Omega_{b,b'}^{UP} \leq P_{i,b,b'} - G_{b,b'} v_{i,b}^2 \leq \Omega_{b,b'}^{UP} \quad (19)$$

$$v_b^{LOW} \leq v_{i,b} \leq v_b^{UP} \quad (20)$$

F. Mantenimiento de los componentes del sistema

Para considerar restricciones asociadas a elementos del sistema que estén momentáneamente fuera de servicio (o por el contrario, cuyo funcionamiento esté forzado por algún otro motivo) se deben modificar las restricciones antes mencionadas. En el caso de la disponibilidad de unidades térmicas o hidráulicas, se deben forzar los valores de las variables $ut_{i,i}$ o $uh_{i,j}$ (por ejemplo, en la ecuación (3) o (9)) a cero o a uno según corresponda.

IV. MÉTODO DE RESOLUCIÓN

Cuando el STHTC es aplicado a casos reales la formulación del problema resultante es demasiado grande para ser resuelta directamente por solvers comerciales. Por lo tanto, varios autores han considerado distintos métodos de descomposición [2, 28, 16, 7, 6, 5, 8, 11, 1, 12, 32, 23, 33, 30].

Uno de los métodos más utilizados últimamente en este campo es la descomposición de Benders [31]. La misma brindó un aporte importante para la descomposición de la estructura de problemas matemáticos con variables especiales, las cuales, cuando son fijadas temporalmente, hacen el problema resultante más sencillo de resolver. La clase de problemas considerada por J. F. Benders, al fijar el valor de estas variables especiales simplifica el problema definido a uno de programación lineal, parametrizado por los valores fijos de las variables especiales. En 1972 A. M. Geoffrion [14] generalizó el enfoque de Benders a una clase más grande de problemas en los cuales el subproblema parametrizado no necesariamente tiene que ser un problema de programación lineal.

La Descomposición Generalizada de Benders puede verse como una técnica similar a la de Planos cortantes. Como se advierte en la literatura [4], en muchos casos, el algoritmo de planos cortantes puede presentar inestabilidades y un mal comportamiento numérico que hace que ciertas veces su

convergencia sea demasiado lenta. Una de las metodologías introducidas por Lemaréchal en [18] y [19] se denomina Bundle o Método de Haces que justamente se asemeja a una versión estabilizada del método de Planos Cortantes. El mecanismo de estabilización de este enfoque se explica en la sección (4.2) e inspira el algoritmo de optimización propuesto en este trabajo.

A. Método de Benders

Este método de descomposición, como muchos otros, es aplicado cuando el problema puede descomponerse de la siguiente forma:

$$\min f_1(x) + f_2(y) \tag{21}$$

$$x \in X, y \in Y,$$

$$g(x, y) \leq 0.$$

y fijando el valor de x el problema resultante es más fácil de resolver.

Siendo $\varphi(x)$ el valor óptimo del subproblema

$$\varphi(x) = \min_{y \in Y} f_2(y) \tag{22}$$

$$y \in Y,$$

$$g(x, y) \leq 0,$$

el problema original puede escribirse de la siguiente manera

$$\min f_1(x) + \varphi(x) \tag{23}$$

$$x \in X,$$

donde se consideró que $\varphi(x) = +\infty$ en el caso en que no exista $y \in Y$ tal que $g(x, y) \leq 0$.

En la mayoría de los casos prácticos, la función de valor óptimo φ es convexa y es fácil de calcular un subgradiente utilizando los multiplicadores de Lagrange asociados a la restricciones en (22). En estos casos es posible aproximar la función φ por un modelo de planos cortantes.

$$\varphi_k(x) = \sup \{f_i + \xi_i^T(x - x_i), i = 1, \dots\} \tag{24}$$

donde f_i es el valor de la función y ξ_i un subgradiente de φ para algún punto x_i en X .

De hecho, se puede demostrar que bajo cierta hipótesis la función φ es equivalente a

$$\varphi(x) = \sup \{ \varphi(y) + \xi^T(x - y), y \in X, \xi \in \partial \varphi(y) \}.$$

Entonces, la definición (24) puede ser vista como una aproximación seccionalmente lineal de esta fórmula, realizada sobre los planos cortantes que en el caso convexo son planos de apoyo, véase la Fig. 1 para un ejemplo gráfico. Lo interesante de esta formulación es que los subgradietes de φ son obtenidos automáticamente en cada evaluación de φ a través de la fórmula 22.

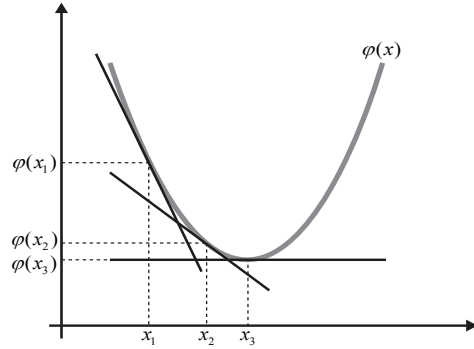


Figura 1. Evolución del algoritmo de planos cortantes.

Puede suceder que el subproblema para algún valor de x sea infactible y que no existan multiplicadores para construir un plano cortante. En esos casos, es posible incluir cortes de factibilidad como se observa en [3]. Sin embargo, en este trabajo no es necesario la utilización de cortes de factibilidad debido a que los subproblemas siempre son factibles.

El método de Benders comienza con una solución inicial $x_0 \in X$ y obtiene el valor actual $\varphi(x_0)$ resolviendo el subproblema (22). Después de calcular las primeras $k - 1$ iteraciones existe un punto x_{k-1} y una aproximación del plano cortante φ_{k-1} . Luego, se resuelve el problema maestro:

$$\min f_1(x) + \varphi_{k-1}(x) \tag{25}$$

$$x \in X,$$

con lo cual, considerando la fórmula (24), puede ser redefinido como

$$\min f_1(x) + z \tag{26}$$

$$x \in X,$$

$$z \geq f_i + \xi_i^T(x - x_i), i = 1, \dots, k.$$

Definiendo x_k como la solución al problema principal, el algoritmo continua iterando hasta que la diferencia entre los límites superior e inferior es lo suficientemente pequeña. El límite inferior está dado por la solución del problema principal y el límite superior está determinado por la solución del subproblema.

Al considerar la aplicación de Descomposición Generalizada de Benders (introducida por Geoffrion) en conjunto con el método de haces al problema STHTC, se debe buscar una forma de descomponer el problema de manera de cumplir con los puntos mencionados en [14]. En la siguiente sección se presenta la descomposición propuesta.

B. Métodos de Haces o Bundle Methods

Como se mencionó anteriormente los métodos de Haces se crearon con el objetivo de corregir los problemas de convergencia que tiene el método de Planos Cortantes [18,

19] . Para evitar oscilaciones y mejorar la mala tasa de convergencia que tiene este método [4], es deseable que el algoritmo *recuerde* el mejor punto obtenido hasta ese momento. Con esta información extra mantenida a lo largo de las iteraciones, el algoritmo puede generar dos secuencias de puntos. Una es la secuencia de puntos usados para definir el modelo de la función a optimizar φ_k . Estos puntos se denominan *candidatos*, y se definen como y^k . La otra secuencia de puntos consiste en los denominados *centros de estabilidad*, y son los puntos que realizan un decrecimiento aceptable en la función objetivo f . Estos últimos se denotan como x^k .

En el caso que aquí se presenta (tomado de [4]), la estabilización se consigue gracias a una penalización cuadrática introducida en la función objetivo del problema maestro. Esta penalización puede ser vista como un mecanismo para no permitir que el siguiente punto candidato vaya demasiado lejos del último centro de la estabilidad obtenido.

El algoritmo general del método de Haces se define de la siguiente manera:

Paso 1: $k = 0$, $\delta_0 = \infty$, $tol = \varepsilon$, $m \in (0,1)$, para un x_0 dada, calcular $f(x_0)$ y $\xi_0 \in \partial f(x_0)$.

Paso 2: Si $\delta_k \leq tol$ Finalizar.

Paso 3: Resolver el problema de optimización estabilizado

$$\min_y \varphi_k(y) + \frac{1}{2} \tau^k P y - x^k P^2 \quad (27)$$

obteniendo y^{k+1} y el subgradiente ξ^{k+1} .

Paso 4: Calcular

$$\delta_{k+1} = f(x^k) - \varphi_k(y^{k+1}) - \frac{1}{2} \tau^k P y - x^k P^2.$$

Paso 5: Evaluar

$$f(x^k) - f(y^{k+1}) \geq m \delta_{k+1}. \quad (28)$$

Verdadero: Aceptar el punto candidato como un nuevo centro de estabilidad $x^{k+1} = y^{k+1}$.

Falso: $x^{k+1} = x^k$.

Paso 6: Mejorar el modelo de planos cortantes con y^{k+1} y ξ^{k+1} . Definir k como $k+1$ e ir al paso 1.

Fin

El término cuadrático en la función objetivo del problema (27) junto con el parámetro de penalización τ^k centra la búsqueda en torno a la última buena solución obtenida (el centro de estabilidad actual). El parámetro se puede actualizar en cada iteración para restringir el espacio de búsqueda

alrededor del centro de estabilidad. No existe un regla óptima aceptada para realizarlo. En [3] los autores estudian la llamada forma inversa para la actualización dada por

$$\frac{1}{\tau^{k+1}} = \frac{1}{\tau^k} + \frac{\langle x^{k+1} - x^k, \xi^{k+1} - \xi^k \rangle}{P \xi^{k+1} - \xi^k P^2}, \quad (29)$$

y también mencionan otros trabajos que han estudiado diferentes reglas, alguna de ellas basadas en el uso de métricas variables. El uso de estas últimas permite obtener, en algunos casos difíciles, convergencia supralineal (ver por ejemplo [27]). Para las pruebas numéricas, y después de muchos experimentos en este trabajo se propone la regla

$$\tau^k = \frac{\alpha \sum_k f(y^k)^{\beta+1}}{(f(y^k) - \varphi_k(y^k))^{\beta} \sum_k \|x^k\|^2}, \quad (30)$$

donde α y β son parámetros de calibración que mejoran la tasa de convergencia. Para el parámetro m en la prueba de descenso, varias pruebas se realizaron con el objetivo de ajustarlo a un valor correcto.

Como se menciona en [18], Las principales ventajas del método de Haces son:

- converge a un punto óptimo,
- mayor robustez,
- mejor estabilidad,
- posibilidad de reducir parte de la información

que se utiliza sin afectar la convergencia.

Los conceptos desarrollados para el método de Haces pueden ser aplicados al método de Benders para mejorar su estabilidad. Para tal fin, el método de Haces es aplicado a la resolución del problema (26) para la minimización de la función $f_1(x) + \varphi(x)$, la cual es generalmente no diferenciable.

C. Descomposición Propuesta

Para simplificar la resolución del problema evitando caer en soluciones infactibles, se incluyen penalidades en la formulación del problema. Estas penalidades representan el incumplimiento de la demanda e incorporan costos asociados a no poder suministrar potencia activa o reactiva en el sistema.

Están representadas por las variables $\varepsilon p_{t,b}^-$, $\varepsilon p_{t,b}^+$, $\varepsilon q_{t,b}^-$ y

$\varepsilon q_{t,b}^+$. Permiten cerrar el balance nodal (activo y/o reactivo)

para cualquier condición, evitando la ocurrencia de infactibilidades en el problema de optimización. Si estas variables son diferentes de cero en la solución final entonces la configuración de generación propuesta no puede satisfacer la potencia activa y/o reactiva demandada en alguna barra. Siguiendo estas consideraciones, las ecuaciones (13) y (15) se redefinen como (31) y (32) respectivamente.

$$\sum_{ib \in ct(b)} p_{t,ib} + \sum_{jb \in ch(b)} p_{t,jb} + \varepsilon p_{t,b}^- - \varepsilon p_{t,b}^+ - \Psi p_{t,b} = P_{t,b,b'} \quad (31)$$

$$\sum_{ib \in cr(b)} qt_{i,b} + \sum_{jb \in ch(b)} qh_{i,jb} + \epsilon q_{i,b}^- - \epsilon q_{i,b}^+ - \Psi q_{i,b} = Q_{i,b,b'} \quad (32)$$

Además, la función objetivo (1) incluyendo penalizaciones por déficit o exceso se redefine de la siguiente manera:

$$f_o = \sum_i \sum_i A_i pt_{i,i}^2 + B_i pt_{i,i} + C_i ut_{i,i} + D_i st_{i,i} + \sum_i \sum_b Ep^- \epsilon p_{i,b}^- + Ep^+ \epsilon p_{i,b}^+ + \sum_i \sum_b Eq^- \epsilon q_{i,b}^- + Eq^+ \epsilon q_{i,b}^+ \quad (33)$$

Para la posible minimización de la función $f(y)$ y debido a la complejidad que esta representa, el problema de minimización presentado en (3) debe ser descompuesto y queda definido de la siguiente manera:

$$\min_{y_m} f_m(y_m) + \varphi(y_m) + \frac{1}{2} \tau^k P y_m - x_m^k P^2, \quad (34)$$

donde $f_m(y_m)$ representa la función objetivo del problema maestro y $\varphi(y_m)$ el modelo que aproxima el subproblema evaluado en el punto y_m . Cabe destacar que se definen y_m e y_{sp} como el conjunto de valores candidatos asociados a las variables del problema maestro y del subproblema respectivamente. A medida que suceden las iteraciones, el algoritmo va agregando cortes al modelo del subproblema y va generando una mejor aproximación del valor real de la función objetivo del subproblema.

$$\varphi(y_m) = \min_{y_m, y_{sp}} f_{sp}(y_m, y_{sp}) \quad (35)$$

En el esquema de descomposición definido para este problema se intenta balancear las complejidades del problema maestro y del subproblema definiendo qué restricciones se asocian a cada uno de ellos. Como se observa en (36) la función objetivo del problema maestro está asociada a la suma de los costos de encendido de las centrales térmicas y a los costos cuadráticos asociados a la generación de las centrales térmicas

$$f_m(y_m) = \sum_i \sum_i A_i pt_{i,i}^2 + B_i pt_{i,i} + C_i ut_{i,i} + D_i st_{i,i}, \quad (36)$$

donde y_m representa el conjunto de variables que se fijan en el problema maestro en cada iteración y son pasadas al subproblema. En el presente trabajo este conjunto de variables está dado por la potencia activa térmica e hidráulica de cada unidad $pt_{i,i}$ y $ph_{i,j}$ respectivamente, las variables binarias asociadas al estado de ambos tipos de unidades $ut_{i,i}$ y $uh_{i,j}$,

y las variables asociadas al encendido y apagado de las unidades térmicas $st_{i,i}$ y $et_{i,i}$. Es decir:

$$y_m = (ut_{i,i}, pt_{i,i}, uh_{i,j}, ph_{i,j}, st_{i,i}, et_{i,i}), \quad (37)$$

de las cuales $ut_{i,i}, pt_{i,i}, uh_{i,j}, ph_{i,j}$ se pasan al subproblema, mientras que $st_{i,i}$ y $et_{i,i}$ sólo se usan en el maestro. Las restricciones consideradas en el problema maestro son las dadas por (3), (5-9), (11), (12), (17), (18).

Las variables consideradas en el subproblema son la potencia reactiva térmica $qt_{i,i}$ e hidráulica $qh_{i,j}$ los excesos o déficit de potencia activa o reactiva ($\epsilon p_{i,b}^-, \epsilon p_{i,b}^+, \epsilon q_{i,b}^-, \epsilon q_{i,b}^+$) en cada una de las barras, y los ángulos $\theta_{i,b}$ y tensiones $v_{i,b}$ en cada una de las barras.

$$y_{sp} = (\epsilon p_{i,b}^-, \epsilon p_{i,b}^+, \epsilon q_{i,b}^-, \epsilon q_{i,b}^+, \theta_{i,b}, v_{i,b}) \quad (38)$$

La función objetivo del subproblema considera los costos asociados a las penalizaciones por déficit o exceso de potencia activa o reactiva en cada una de las barras.

$$f_{sp} = \sum_i \sum_b Ep^- \epsilon p_{i,b}^- + Ep^+ \epsilon p_{i,b}^+ + Eq^- \epsilon q_{i,b}^- + Eq^+ \epsilon q_{i,b}^+ \quad (39)$$

Las restricciones restantes (4), (10), (13), (15), (19), (20) se consideran en el subproblema con los valores de las variables del maestro fijadas por la solución del mismo en cada iteración.

Como se puede observar en este caso el problema maestro es computacionalmente más caro que el subproblema. El problema maestro se corresponde con un problema de programación cuadrática con restricciones lineales que también tiene restricciones asociadas a variables enteras. Este tipo de problemas ha sido estudiado por mucho tiempo y en la actualidad existen varios solvers comerciales con probada eficiencia en resolverlos. En este trabajo se utiliza el lenguaje algebraico de modelado *GAMS* y los solvers que el mismo provee para resolver tanto el problema maestro como el subproblema.

Se puede observar que en el subproblema no se presentan acoples temporales como en el problema maestro con lo cual se resuelven t problemas similares a un flujo óptimo de potencia, donde lo que se busca minimizar son las penalizaciones antes mencionadas.

Los valores de las variables que indican el estado de cada unidad térmica $ut_{i,i}$, la potencia activa térmica $pt_{i,i}$, la hidráulica $ph_{i,j}$ y las variables binarias asociadas al estado de las mismas $uh_{i,j}$ son fijadas en el subproblema por la solución generada en el problema maestro. Para simplificar la ecuación de los cortes y simplificar el pasajes de valores de las variables y de multiplicadores de los cortes se agregaron las siguientes restricciones al subproblema:

$$\begin{aligned}
pt_{t,i} &= pt_{t,i}^k : \mu_{t,i}^k \\
ph_{t,j} &= ph_{t,j}^k : \lambda_{t,j}^k \\
ut_{t,i} &= ut_{t,i}^k : \pi_{t,i}^k \\
uh_{t,j} &= uh_{t,j}^k : \psi_{t,j}^k
\end{aligned} \quad (40)$$

Donde $uh_{t,j}$, $ph_{t,j}$, $ut_{t,i}$ y $pt_{t,i}$ son variables del subproblema, $uh_{t,j}^k$, $ph_{t,j}^k$, $ut_{t,i}^k$ y $pt_{t,i}^k$ son la solución del problema maestro en la iteración k , y $\mu_{t,i}^k$, $\lambda_{t,j}^k$, $\psi_{t,j}^k$ y $\pi_{t,i}^k$ los multiplicadores asociados.

Para la incorporación de los cortes al problema maestro se sigue un esquema similar al presentado en (25) y (26). A la función objetivo del maestro se le incorpora el término $\sum_t z_t$ que se corresponde con el valor del modelo de la función objetivo del subproblema en la iteración k , $(\varphi(y_m^k))$. A su vez, los cortes quedan definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
z_t \geq z_t^k &+ \sum_j \lambda_{t,j}^k (uh_{t,j} - uh_{t,j}^k) + \\
&+ \sum_j \psi_{t,j}^k (ph_{t,j} - ph_{t,j}^k) + \\
&+ \sum_i \mu_{t,i}^k (pt_{t,i} - pt_{t,i}^k) + \\
&+ \sum_i \pi_{t,i}^k (ut_{t,i} - ut_{t,i}^k).
\end{aligned} \quad (41)$$

V. RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se presentan los principales resultados obtenidos aplicando el enfoque propuesto en las secciones anteriores. La aplicación de los distintos algoritmos se realiza sobre sistemas de distintos tamaños. En principio, se utiliza un sistema ficticio de 9 barras utilizado en [31] y que en ese trabajo se resolvió aplicando la descomposición de Benders. Este sistema pequeño permite analizar detalles de los resultados que son difíciles de observar en sistemas de gran tamaño. Además, se observa la aplicación de la metodología propuesta al caso de prueba de 24 barra de la IEEE. Una de las características que deben observarse en esta sección es la capacidad del algoritmo para considerar el flujo de potencia reactiva y cómo este hecho impacta en el resultado. Esta es una característica importante apreciada por los operadores del sistema debido a que evita la necesidad de aplicar correcciones post-despacho. Los valores de tensión en cada barra se comparan con los resultados obtenidos a partir de *PowerWorld Simulator* [25] y [26], que es un estándar en la industria eléctrica. Debido a que este software comercial no tiene la capacidad de resolver el problema de coordinación hidrotérmica, los niveles de potencia para cada unidad se fijan con los resultados del algoritmo, y los niveles de tensión en cada barra se comparan con los valores obtenidos a través del

PowerWorld Simulator de manera de verificar su corrección. Otra característica importante a analizar es la convergencia del algoritmo, observando el número de iteraciones y la calidad de la solución, que debe ser óptima desde un punto de vista económico.

Las características de los sistemas utilizados en las pruebas se presentan a continuación:

A. Caso de prueba de 9 barras

Este sistema se basa en una red de transmisión de 9 nodos con 9 líneas. El parque generador está compuesto por tres unidades térmicas y una hidroeléctrica.

Los objetivos de las pruebas realizadas sobre este sistema son:

- Analizar la solución propuesta por el algoritmo.
- Verificar la calidad de la solución comparándola con la del algoritmo propuesto en [32] y basado en Benders (sin estabilizar).
- Comparar los valores de tensiones en barras y la corrección de la solución utilizando *PowerWorld Simulator*.

Para la prueba asociada a esta red se utiliza un perfil de demandas activas y reactivas las cuales fueron presentadas en [31], de donde se pueden obtener todos los datos de la red utilizada.

En la Fig. 2 se presenta un diagrama unifilar del sistema utilizado.

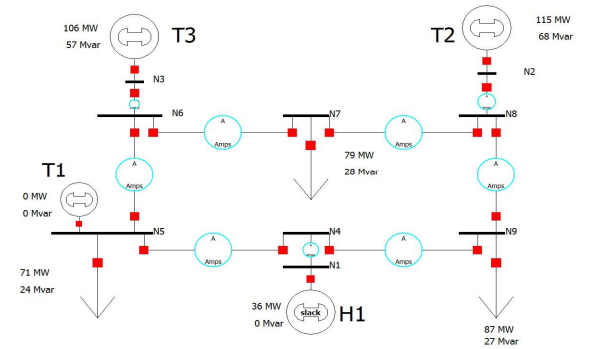


Figura 2. Diagrama unifilar del sistema de 9 barras.

En las tablas 1 y 2 se muestran las características de potencia activa y reactiva máxima y mínima y los costos de operación de las unidades térmicas de la red.

TABLA 1: PARÁMETROS ASOCIADOS A LAS POTENCIAS DE LAS UNIDADES TÉRMICAS

Nombre	Potencia Activa		ΔPT^{UP}	Potencia Reactiva	
	Min	Max		Min	Max
T1	10	250	50	-100	100
T2	10	300	50	-100	100
T3	10	270	50	-100	100

Todas las potencias están expresadas en $[MW]$ y los coeficientes de costos cuadráticos (A), lineales (B),

independientes (C) y de arranque en $[U / MWh^2]$, $[U / MWh]$, $[U]$ y $[U]$ respectivamente.

TABLA 2
COSTOS DE LAS UNIDADES TÉRMICAS

Nombre	Costos			Tiempo Mín de Op.		
	A	B	C	Arr.	On [h]	Off [h]
T1	0.11	5	150	500	6	6
T2	0.15	6	1200	500	6	6
T3	0.123	1	335	500	6	6

Las características de la central hidráulica H1 se presentan en la tabla 3 y las características del embalse en el tabla 4. El factor de conversión energética que relaciona la potencia generada en la central H1 con el caudal turbinado en el embalse es de $3,846 MW / m^3 / s$.

TABLA 3
POTENCIAS DE LA UNIDAD HIDRÁULICA

Nombre	Potencia Activa		Potencia Reactiva	
	Mínima	Máxima	Mínima	Máxima
H1	0	240	-100	100

TABLA 4
CARACTERÍSTICAS DEL EMBALSE

Mínimo	Volumen $[1000 m^3]$		Caudal de Agua	
	Máximo	Inicial	Final	$[m^3/s]$
	1000	568	568	31.2

La Tabla 5 detalla los parámetros de las líneas, resistencia (R), reactancia (X) y capacidad.

TABLA 5
CARACTERÍSTICAS DE LAS LÍNEAS

Desde	Hasta	R [Ohm]	X [Ohm]	Capacidad [MW]
N1	N4	0.04287	0.23341	250
N3	N6	0.00471	0.02944	250
N4	N5	0.03862	0.25562	250
N4	N9	0.04689	0.31566	250
N6	N5	0.04689	0.31566	300
N6	N7	0.10193	0.59263	250
N8	N7	0.04396	0.36805	150
N8	N2	0.00476	0.02944	150
N9	N8	0.04534	0.36943	250

Y la tabla 6 describe la demanda y la reserva rotante (ζ_t) del sistema para todo el día. Esta última es calculada como el 15% de la demanda total del sistema para cada tiempo. Los coeficientes de penalización Ep^- , Ep^+ , Eq^- y Eq^+ se definen con un valor de $1e^6$ para este ejemplo.

1) Análisis de los resultados generados por el algoritmo

En la Fig. 3 puede observarse la demanda, la generación de energía térmica e hidroeléctrica y el nivel del embalse por cada tiempo. El algoritmo utiliza la generación de energía hidráulica para los períodos de mayor demanda, cuando el costo marginal de la energía generada es también mayor.

Teniendo en cuenta los niveles de los embalses para todo el horizonte de planificación, se puede observar que la estrategia propuesta por el algoritmo es la de almacenar agua durante los períodos de menor demanda para usarla durante los períodos de demanda pico.

TABLA 6
DEMANDA DE POTENCIA ACTIVA Y REACTIVA

Hs	Activa			Reactiva			ζ_t
	N5	N7	N9	N5	N7	N9	
1	70.7	78.5	98.2	23.6	27.5	39.3	37.1
2	65.9	73.2	91.5	22	25.6	36.6	34.6
3	66	73.3	91.6	22	25.6	36.6	34.5
4	63	70	87.5	21	24.5	35	33.1
5	63.4	70.5	88.1	21.1	24.7	35.2	33.3
6	68.7	76.4	95.4	22.9	26.7	38.2	36.1
7	68.3	75.9	94.9	22.8	26.6	38	35.9
8	69.7	77.4	96.7	23.2	27.1	38.7	36.6
9	69.6	77.4	96.7	23.2	27.1	38.7	36.6
10	72.7	80.8	101	24.2	28.3	40.4	38.2
11	72.3	80.4	100.5	24.1	28.1	40.2	38
12	75.3	83.6	104.5	25.1	29.3	41.8	39.5
13	73.8	82	102.5	24.6	28.7	41	38.7
14	71.6	79.5	99.4	23.9	27.8	39.8	37.6
15	71.4	79.3	99.1	23.8	27.8	39.7	37.5
16	71.7	79.7	99.6	23.9	27.9	39.8	37.6
17	71.4	79.4	99.2	23.8	27.8	39.7	37.5
18	70.9	78.8	98.5	23.6	27.6	39.4	37.2
19	85.6	95.1	118.9	28.5	33.3	47.6	44.9
20	89.2	99.1	123.9	29.7	34.7	49.6	46.8
21	90	100	125	30	35	50	47.2
22	86.7	96.3	120.4	28.9	33.7	48.2	45.5
23	77.2	85.8	107.3	25.7	30	42.9	40.5
24	72.4	80.5	100.6	24.1	28.2	40.2	38

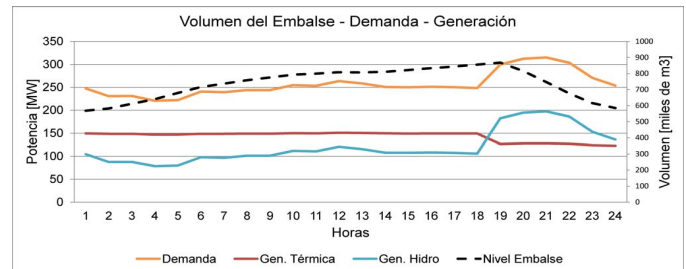


Figura 3. Evolución del volumen del embalse.

2) Comparación de los valores de tensiones en barra obtenidos con PowerWorld Simulator

En la presente sección se busca constatar la corrección de los resultados obtenidos en cuanto al valor de las tensiones en barra. Para ello, en la tabla 7 se visualizan los valores de tensión en barra obtenidos aplicando el algoritmo propuesto y los calculados por Powerworld Simulator. Cabe destacar que esta aplicación no tiene la opción de resolver problemas de coordinación hidrotérmica considerando flujos AC. Para comparar los resultados para un tiempo dado, se fijaron los perfiles de demanda y potencia generadas definidas por el algoritmo y se compararon las tensiones en cada barra generadas por ambos enfoques.

TABLA 7
DIFERENCIAS ENTRE EL ALGORITMO PROPUESTO Y POWERWORLD SIMULATOR
PARA EL TIEMPO 24

Nodo	Algoritmo	PW Simulator	Diferencia
N1	1.0932	1.0939	0.0007
N2	1.1	1.1036	0.0036
N3	1.0846	1.0863	0.0017
N4	1.079	1.0796	0.0006
N5	1.1	1.1042	0.0042
N6	1.0846	1.0831	0.0015
N7	1.0577	1.0614	0.0037
N8	1.0935	1.0902	0.0033
N9	1.0511	1.0535	0.0024

Al comparar los valores obtenidos utilizando ambos enfoques podemos observar que el error nunca es mayor al 1%.

3) Análisis de convergencia

En esta sección se compara la convergencia del algoritmo basado en el método de Haces (y desarrollado en el presente trabajo) con el que utiliza el método de Benders presentado en [32]. Este último esquema es uno de los aportes más recientes en la línea de resolución del problema de STHTC.

En la Fig. 4 se presenta una comparación gráfica de la convergencia de ambos algoritmos.

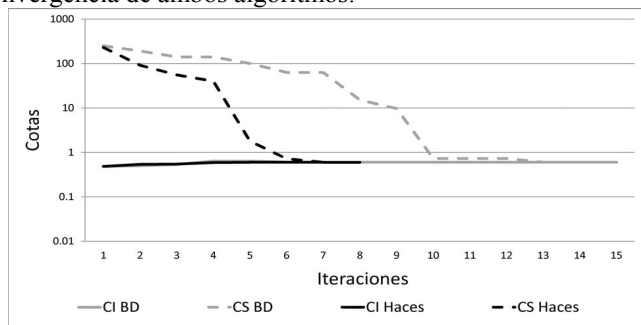


Figura 4. Comparación de la convergencia de ambos métodos.

Las pruebas se realizaron en una PC AMD Athlon X3 435 2.96 Ghz con 4 GB de RAM. La versión de GAMS utilizada es la 23.6 y los solvers utilizados para la resolución del problema son las versiones de CPLEX y CONOPT que vienen con esa versión de GAMS.

El tiempo de resolución es de 61 segundos y 15 iteraciones para el algoritmo basado en Benders, mientras que el introducido en el actual trabajo (el cual se basa en el método de Haces) utiliza 28 segundos y 8 iteraciones. Ambos ejecutados con una tolerancia relativa de $1e^{-6}$. El tamaño del modelo maestro resuelto consta de 385 variables (y 144 variables discretas). El número de ecuaciones comienza a crecer desde 1064 en la iteración inicial a 1400 en la iteración número 15 para el caso de Benders, y hasta 1232 en la iteración número 8 en el caso del método de Haces. Este crecimiento de tamaño corresponde a los cortes de Benders añadidos en cada iteración (se añade un corte para cada tiempo). El subproblema se descompone en 24 problemas

(cada uno corresponde a un intervalo de tiempo determinado), con 66 variables y 88 ecuaciones de cada uno.

Se puede observar como al aplicar el algoritmo presentado en este trabajo se reduce notablemente la cantidad de iteraciones realizadas. Además, en el resultado obtenido los déficits o excesos de potencias activas o reactivas fueron valores menores a $1e^{-3}$ MW, que son despreciables en sistemas eléctricos de potencia.

En la Fig. 5 se presenta la evolución de los valores de los distintos coeficientes de estabilización. Cabe destacar, que debido a que la potencia mínima hidráulica es cero en este caso no se consideró la variable $uh_{i,j}$ y por lo tanto tampoco su coeficiente de estabilización asociado.

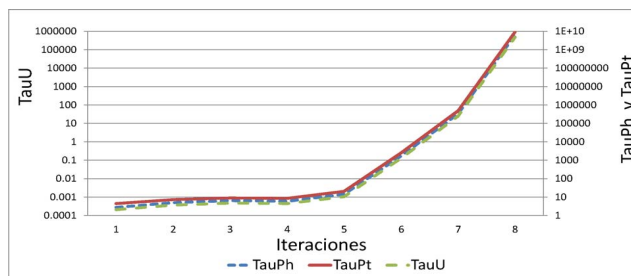


Figura 5. Evolución de los coeficientes de Estabilización.

Estos coeficientes tienen la función de penalizar la distancia con el último centro de estabilidad encontrado. Como se puede observar, estos comienzan en valores cercanos a cero y a medida que las iteraciones avanzan los mismos incrementan exponencialmente su valor. El efecto que tiene este comportamiento en el algoritmo es el de penalizar más la distancia cuando mejor es la solución.

Las variables de penalización utilizadas en el subproblema en conjunto con los cortes de factibilidad, cumplen la función de enviar señales al maestro, de manera que el mismo, genere soluciones que consideren las restricciones asociadas a la red. Si bien la magnitud de estos valores debe ser cero en la solución óptima, por cuestiones numéricas no es fácil que llegue a ese valor. Desde el punto de vista práctico, estos valores se consideran residuales y la presencia de los mismos no tiene ningún efecto en el despacho final. Una mayor fuente de error en el despacho es el pronóstico de demanda el cual se encuentra fácilmente en el orden del 2% al 3% de la demanda total.

El hecho de reducir estos valores, o su impacto en el costo total, requiere de un número no menor de iteraciones sobre el final de la convergencia del algoritmo. Durante estas iteraciones generalmente el costo de la operación no varía demasiado y menos aún las cantidades despachadas por las unidades del sistema. Lo formulado anteriormente es válido siempre y cuando los valores de las variables de holgura no se deban a la incapacidad del sistema de satisfacer la demanda requerida. Cabe destacar, que cuando se presentan estos casos las magnitudes de estos valores son más grandes y no fluctúan

a lo largo de las iteraciones, sino se estabilizan en los valores de déficit de potencia que efectivamente presenta el despacho.

B. Caso de prueba de 24 barras de la IEEE

El método propuesto es aplicado también al caso de prueba de IEEE de 24 barras. En este caso, el sistema consta de 26 unidades de las cuales, 18 son térmicas e 8 hidráulicas. Las características de las unidades, de las líneas de transmisión y de los perfiles de demanda se obtuvieron de [34]. Las pruebas numéricas se llevaron a cabo en un PC AMD Athlon X3 435 de 2,96 GHz y con 4 GB de RAM. La versión de GAMS utilizada es la 23.6 y los solvers utilizados para resolver los problemas son CPLEX y CONOPT. El tiempo de resolución y las iteraciones se presentan en la tabla 8.

TABLA 8
COMPARACIÓN DEL TIEMPO DE RESOLUCIÓN ENTRE LOS DOS ALGORITMOS

	Benders	Haces
Iteraciones	30	14
Tiempo (s)	272	127

De la misma manera que sucedió con el ejemplo anterior, para el caso de prueba de 24 barras el algoritmo presentado en este trabajo reduce a menos de la mitad la cantidad de iteraciones realizadas, y de mayor manera aún el tiempo utilizado para la resolución del STHTC.

Los tiempos de resolución obtenidos son de 272 segundos para el algoritmo basado en Benders y 127 segundos para el introducido en el actual trabajo. Ambos ejecutados con una tolerancia relativa de $1e^{-4}$. El tamaño del modelo maestro resuelto consta de 985 variables (y 336 variables discretas). El número de ecuaciones comienza a crecer desde 2651 en la iteración inicial a 3347 en la iteración número 30 para el caso de Benders, y hasta 2963 en la iteración número 14 en el caso del método de Haces. Como se mencionó anteriormente, este crecimiento de tamaño corresponde a los cortes de Benders añadidos en cada iteración (se añade un corte para cada tiempo). El subproblema se descompone en 24 problemas (cada uno corresponde a un intervalo de tiempo determinado), con 174 variables y 273 ecuaciones de cada uno.

VI. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este trabajo se formuló matemáticamente el problema de STHTC con un alto grado de detalle que permite en su aplicación evitar las correcciones post-despacho. Esta formulación, que incluye un modelado AC de la red de transmisión, hace que el problema de optimización a resolver sea de tipo entero-mixto, no-convexo, no-lineal y de gran dimensión.

La manera en que se formuló el modelo es fundamental para que los resultados del despacho sean aplicables a sistemas con redes extensas y débilmente malladas, típicas de países subdesarrollados o en vías de desarrollo y con grandes extensiones de tierra, como los presentes en Latinoamérica. Esta formulación integra la coordinación hidrotérmica y el despacho con la resolución del flujo óptimo de potencias en

un solo problema, evitando la puesta en marcha de máquinas no previstas. Esto último sucedería si los problemas se consideraran de manera separada o con una modelación DC de la red de transmisión, pudiendo acarrear la operación no óptima del sistema eléctrico.

Para la resolución de este problema se separó el problema original en un problema maestro cuadrático entero mixto con variables binarias y un subproblema no-lineal con variables continuas. La manera de descomponerlo es la más adecuada para el tipo de sistemas en los que se probó la metodología. Para su resolución se utilizó un enfoque novedoso basado en el método de Haces, el cual mejora los tiempos de resolución de algoritmos propuestos últimamente en la literatura científica. Este método a su vez, soluciona los problemas de convergencia presentados en enfoques similares basados en la resolución mediante el método de Benders.

La metodología propuesta se aplicó a distintos casos de pruebas de 9 y 24 barras. Se observo una notable mejora en cuanto a los tiempos de resolución con respecto a uno de los últimos aportes importantes en la resolución del STHTC presentado en [32]. Un estudio sobre una red real de gran porte en la zona oeste de Argentina es objeto de una publicación en curso y los resultados preliminares muestran la factibilidad de esta metodología.

En cuanto a los trabajos futuros, se pretende combinar distintas estrategias de resolución, de manera de modificar el problema a resolver según el avance de las iteraciones del método de Haces. Por ejemplo, en las primeras iteraciones se puede resolver una versión relajada del problema maestro considerando restricciones DC en el subproblema, de manera de mejorar el tiempo de resolución de las mismas, para incorporar la resolución del problema maestro y subproblema original sólo en las últimas iteraciones.

Para mejorar aún más la performance del algoritmo puede aplicarse la metodología de Compresión de Haces presentada en [3] y también permitir el procesamiento en paralelo de los subproblemas aprovechando que los mismos pueden resolverse de manera desacoplada.

REFERENCIAS

- [1] N. Alguacil and A. J. Conejo, "Multiperiod optimal power flow using benders decomposition", IEEE Transactions on Power Systems, 15(1), pp. 196–201, 2000.
- [2] L. F. B. Baptistella and J. C. Geromel, "Decomposition approach to problem of unit commitment schedule for hydrothermal systems", IEE Proceedings D Control Theory and Applications, 127(6), pp. 250–258, 1980.
- [3] J. F. Bonnans, J. C. Gilbert, C. Lemaréchal, and C. A. Sagastizábal, Numerical Optimization: Theoretical and Practical Aspects, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2006.
- [4] J.F. Bonnans and C. Lemaréchal, Numerical optimization: theoretical and practical aspects, Springer-Verlag New York Inc, 2006.
- [5] Xiaomin Bai and S. M. Shahidehpour, "Hydro-thermal, scheduling by tabu search and decomposition method", IEEE Transactions on Power Systems, 11(2), pp. 968–974, 1996.
- [6] A. Conejo and J. Medina, "Long-term hydro-thermal coordination via hydro and thermal subsystem decomposition" in Proc. th Mediterranean Electrotechnical Conf, pp. 921–924, 1994.
- [7] A. A. F. M. Carneiro, S. Soares, and P. S. Bond, "A large scale of an optimal deterministic hydrothermal scheduling algorithm", IEEE Transactions on Power Systems, 5(1), pp. 204–211, 1990.

- [8] G. Demartini, T. R. De Simone, G. P. Granelli, M. Montagna, and K. Robo, "Dual programming methods for large-scale thermal generation scheduling", in Proc. 20th Int Power Industry Computer Applications. Conf, pp. 232–238, 1997.
- [9] A. L. Diniz and M. E. P. Maceira, "A four-dimensional model of hydro generation for the short-term hydrothermal dispatch problem considering head and spillage effects", IEEE Transactions on Power Systems, 23(3), pp.1298–1308, 2008.
- [10] A. L. Diniz, T. N. Santos, and M. E. P. Maceira, "Short term security constrained hydrothermal scheduling considering transmission losses" in Proc. IEEE/PES Transmission & Distribution Conf. and Exposition: Latin America TDC '06, pp. 1–6, 2006.
- [11] J. C. Enamorado, A. Ramos, and T. Gomez, "Multi-area decentralized optimal hydro-thermal coordination by the dantzig-wolfe decomposition method", in Proc. IEEE Power Engineering Society Summer Meeting, volume 4, pages 2027–2032, 2000.
- [12] E. C. Finardi and E. L. da Silva, "Solving the hydro unit commitment problem via dual decomposition and sequential quadratic programming", IEEE Transactions on Power Systems, 21(2), pp. 835–844, 2006.
- [13] E.C. Finardi, E.L. da Silva, and C. Sagastizábal, "Solving the unit commitment problem of hydropower plants via Lagrangian Relaxation and Sequential Quadratic Programming", Computational & applied mathematics, 24, pp. 317–342, 2005.
- [14] A.M. Geoffrion, "Generalized benders decomposition", Journal of optimization theory and applications, 10(4), pp. 237–260, 1972.
- [15] J.J. Grainger and W.D. Stevenson, "Power system analysis", volume 152. McGraw-Hill New York, 1994.
- [16] H. Habibollahzadeh and J. A. Bubenko, "Application of decomposition techniques to short-term operation planning of hydrothermal power system", IEEE Power Eng. Rev., (2), pp. 28–29, 1986.
- [17] F.S. Hillier, G.J. Lieberman, and G.J. Liberman, Introduction to operations research, McGraw-Hill New York, 1990.
- [18] C. Lemaréchal, "Bundle methods in nonsmooth optimization", Pergamon Press: Oxford, pp. 79–102, 1978.
- [19] C. Lemaréchal, A. Nemirovskii, and Y. Nesterov, "New variants of bundle methods", Mathematical programming, 69(1), pp. 111–147, 1995.
- [20] C. Lemaréchal and C. Sagastizábal, "Variable metric bundle methods: from conceptual to implementable forms", Mathematical Programming, 76(3), pp. 393–410, 1997.
- [21] B. Lu and M. Shahidehpour, "Unit commitment with flexible generating units", IEEE Transactions on Power Systems, 20(2), pp. 1022–1034, 2005.
- [22] C. Murillo-Sanchez and R.J. Thomas, "Thermal unit commitment including optimal AC power flow constraints", in Proceedings of the Hawaii International Conference on System Sciences, volume 31, pp. 81–88, 1998.
- [23] T. Norbiato dos Santos and A. L. Diniz., "A new multiperiod stage definition for the multistage benders decomposition approach applied to hydrothermal scheduling" IEEE Transactions on Power Systems, 24(3), pp. 1383–1392, 2009.
- [24] W. Ongsakul and N. Petcharakas, "Transmission constrained generation scheduling in a centralized electricity market by improved Lagrangian relaxation", in Power Engineering Society General Meeting, 2004, IEEE, pp. 1156–1163, 2005.
- [25] T.J. Overbye, P.W. Sauer, C.M. Marzinzik, and G. Gross, "A user-friendly simulation program for teaching power system operations", IEEE Transactions on Power Systems, 10(4), pp. 1725–1733, 1995.
- [26] J. Overbye and J.D. Weber, "Visualization of power system data", in System Sciences, 2000. Proceedings of the 33rd Annual Hawaii International Conference on, pp. 7, IEEE, 2000.
- [27] L.A. Parente, P.A. Lotito, F.J. Mayorano, A.J. Rubiales, and M.V. Solodov, "The hybrid proximal decomposition method applied to the computation of a nash equilibrium for hydrothermal electricity markets", Optimization and Engineering, 12(1), pp. 277–302, 2011.
- [28] M. V. F. Pereira and L. M. V. G. Pinto, "Application of decomposition techniques to the mid - and short - term scheduling of hydrothermal systems", IEEE Trans. Power App. Syst., (11), pp. 3611–3618, 1983.
- [29] A. Rubiales, F. Mayorano, and P. Lotito, "Optimización aplicada a la coordinación hidrotérmica del mercado eléctrico argentino", Mecánica Computacional, XXVI, pp. 1906–1920, 2007.
- [30] A. J. Rubiales, M. A. Risso, F. J. Mayorano, and P. A. Lotito, "Short term hydrothermal coordination problem considering environmental concerns", Latin American Applied Research, 42, pp. 413–425, 2012.
- [31] Wilfredo S. Sifuentes and Alberto Vargas, "Hydrothermal scheduling using benders decomposition: Accelerating techniques", IEEE Transactions on Power Systems, 22(3), pp. 1351–1359, 2007.
- [32] W. Sifuentes and A. Vargas, "Short-term hydrothermal coordination considering an ac network modeling", International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 29(6), pp. 488–496, 2007.
- [33] F. Y. K. Takigawa, E. C. Finardi, and E. L. da Silva, "A decomposition strategy to solve the short-term hydrothermal scheduling based on lagrangian relaxation", in Proc. IEEE/PES Transmission and Distribution Conf. and Exposition: Latin America (T&D-LA), pp. 681–688, 2010.
- [34] SJ Wang, SM Shahidehpour, DS Kirschen, S. Mokhtari, and GD Irisarri, "Short-term generation scheduling with transmission and environmental constraints using an augmented lagrangian relaxation", Power Systems, IEEE Transactions on, 10(3), pp. 1294–1301, 1995.
- [35] A.J. Wood and B.F. Wollenberg, Power generation, operation, and control, Wiley New York et al., 1984.



Aldo J. Rubiales recibió el título de Ingeniero de Sistemas en 2004 y de Doctor en Matemática Computacional e Industrial en 2011, en la Universidad Nacional del Centro de la provincia de Buenos Aires, Argentina. Actualmente se desempeña como jefe de trabajos prácticos en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la provincia de Buenos Aires y es becario de posgrado de CONICET con lugar de trabajo en el PLADEMA de la misma facultad. Su área de investigación es la optimización aplicada a redes, especialmente en el área de sistemas eléctricos de potencia, tráfico vehicular, transporte a través de ductos y telecomunicaciones.



Lisandro A. Parente recibió el título de Licenciado en Matemática en 2005 y de Doctor en Matemática en 2009, en la Universidad Nacional de Rosario, Argentina. Su área de investigación es la optimización continua, con particular interés en las aplicaciones a la optimización energética. Es profesor adjunto en la Universidad Nacional de Rosario e investigador asistente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), con lugar de trabajo en el Centro Internacional Franco Argentino de Ciencias de la Información y de Sistemas (CIFASIS), Rosario, Argentina.



Pablo A. Lotito recibió el título de Licenciado en Matemática en 1994 y de Doctor en Matemática en 1999, en la Universidad Nacional de Rosario, Argentina. Realizó postdocs en el INRIA, la ENPC y el INRETS de Francia, fue profesor invitado en la Ecole de Mines de Paris y en la Universidad Paris I Panthéon-Sorbonne. Actualmente es profesor de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la provincia de Buenos Aires e investigador del CONICET con lugar de trabajo en el PLADEMA de la misma facultad. Su área de investigación es el control y la optimización especialmente los problemas planteados sobre redes como tráfico vehicular, redes de oleoductos, redes energéticas y redes de comunicaciones.